مراجعة الجبر والهندسة الفراغية

للصف الثالث الثانوى

من اعداد الاستاذ/
ربيع فايد معلم خبير الرياضيات بالمرحلة الثانوية

أ/ربيع فايد معلم خبير الرياضيات

مبدأ العد – التباديل – التوافيق

- عند اختيار ر من الاشياء من بين ن من الاشياء
- السحب مع الترتيب = سحب الواحدة تلو الاخرى
- السحب مع عدم الترتيب =السحب دفعة واحدة
- إذا كان عدد طرق إجراء عملية م وعدد طرقة إجراء عملية أخرى ن
فإن عدد طرق إجراء العمليتين **معاً** (العملية الاولى و الثانية) = م × ن
، عدد طرق أجراء العملية الاولى **أو** الثانية = م + ن
- فى حالة الاحلال و الترتيب ∴ عدد الطرق = $ن^{ر}$ حيث ن الكل ، ر الجزء المختار منه

مثلا: تكوين عدد من رقمين من الارقام { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} يساوى =$٥^{٢}$ =٢٥

- فى حالة الاحلال وعدم الترتيب(ليس مهم الترتيب) ∴ عدد الطرق = $^{ن+ر-١}ق_{ر}$

مثلا: توزيع ٣ كرات متماثلة على ٤ صناديق = $^{٤+٣-١}ق_{٣}$ =٢٠

- فى حالة عدم الاحلال والترتيب ∴ عدد الطرق = $^{ن}ل_{ر}$

مثلا: عدد طرق وقوف ٤ سيارات فى ساحة انتظار به ١٠ أماكن يساوى $^{١٠}ل_{٤}$ =٥٠٤٠

- فى حالة عدم الاحلال ووعدم الترتيب ∴ عدد الطرق = $^{ن}ق_{ر}$

مثلا: عدد طرق اختيار فريق من ٥ أشخاص من بين ١٢ شخصاً يساوى = $^{١٢}ق_{٥}$ =٧٩٢

- قانون الجمع $^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر-١} = {}^{ن+١}ق_{ر}$ ، قانون النسبة $\frac{^{ن}ق_{ر}}{^{ن}ق_{ر-١}} = \frac{ن-ر+١}{ر}$ ،

$$\frac{^{ن}ق_{ر}}{^{ن-١}ق_{ر-١}} = \frac{ن}{ر}$$

لتطبيق قانونى الجمع والنسبة شرط ثبات العلم و الدليل يزيد واحد

- إذا كان $^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{هـ}$ فإن ر = هـ أ، ر=ن ، هـ = ن-١ أ، هـ = ن ، ر= ن-١
- إذا كان $^{ن}ق_{ر} = {}^{م}ق_{ر}$ فإن ن=م أ، ر = صفر
-
- إذا كان الدليل غير معلوم غالباً ما نستخدم الفك بالمضروب
- عدد طرق جلوس ر من الاشياء المتجاورة مع تحديد نقطة بداية على ن من الاشياء على شكل دائرة = ن $\lfloor ر$
- عدد طرق جلوس ر من الاشياء على ن من الاشياء المتجاورة على شكل صف = (ن − ر + ١) $\lfloor ر$
- عدد طرق جلوس ر من الاشياء على ر من الاشياء على شكل دائرة = $\lfloor ر-١$
- عدد طرق جلوس ر من الاشياء على ر من الاشياء على شكل صف = $\lfloor ر$

نظرية ذات الحدين بأس صحيح موجب

- مفكوك ذات الحدين $(س+أ)^{ن}$

$= س^{ن} + {}^{ن}ق_{١} أ س^{ن-١} + {}^{ن}ق_{٢} أ^{٢} س^{ن-٢} + {}^{ن}ق_{ر} أ^{ر} س^{ن-ر} + ... + أ^{ن}$

عدد حدود المفكوك = ن +١ ، قوى الحد الاول تتناقص بينما قوى العدد الثانى تزداد

إذا كانت ، ن زوجى فأن عدد الحدود فردى ويكون حد أوسط واحد ترتيبه = $\frac{ن+٢}{٢}$

، إذا كانت ، ن فردى فأن عدد الحدود زوجى ويكون حدان أوسطان ترتيبهما = $\frac{ن+١}{٢}$ ، $\frac{ن+٣}{٢}$

- **الحد العام** $ع_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر} أ^{ر} س^{ن-ر} = {}^{ن}ق_{ر} \times (\text{الثانى})^{ر} \times (\text{الاول})^{\text{الفرق}}$
- **قاعدة** $(س+أ)^{ن} + (س-أ)^{ن} = ٢(ع_{١} + ع_{٣} + ع_{٥} + ...)$ **= ضعف الحدود الفردية**
- **قاعدة** $(س+أ)^{ن} - (س-أ)^{ن} = ٢(ع_{٢} + ع_{٤} + ع_{٦} + ...)$ **= ضعف الحدود الزوجية**

ايجاد الحد المشتمل على $س^{ك}$ من مفكوك ذات الحدين

- **نوجد الحد العام ونقارن قوى س فيه بالمطلوب أو نستخدم أفكار أخرى حسب السؤال**
- **لايجاد الحد الخالى من س نوجد الحد العام ونضع أس س بالصفر ويوجد افكار اخرى**
- **الحد العام** $ع_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر} أ^{ر} س^{ن-ر} = {}^{ن}ق_{ر} \times (\text{الثانى})^{ر} \times (\text{الاول})^{\text{الفرق}}$
- **قاعدة** $(س+أ)^{ن} + (س-أ)^{ن} = ٢(ع_{١} + ع_{٣} + ع_{٥} + ...)$ **= ضعف الحدود الفردية الرتبة**
- **قاعدة** $(س+أ)^{ن} - (س-أ)^{ن} = ٢(ع_{٢} + ع_{٤} + ع_{٦} + ...)$ **= ضعف الحدود الزوجية الرتبة**
- **لمعرفة الحد الخالى من س بسرعة =** $\frac{\text{أس المفكوك} \times \text{أس الرمز فى الحد الاول}}{\text{أس الرمز فى الحد الاول} - \text{أس الرمز فى الحد الثانى}} + ١$

مثلا **الحد الخالى من س فى المفكوك** $\left(س^{٢} - \frac{١}{س^{٤}}\right)^{١٢}$ **رتبته** $= \frac{١٢ \times ٢}{٢ - (-٤)} + ١ = \frac{٢٤}{٦} + ١ = ٤ + ١ = ٥$

النسبة بين حدين متتاليين من مفكوك ذات الحدين

- **الحد العام** $ع_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر} أ^{ر} س^{ن-ر} = {}^{ن}ق_{ر} \times (\text{الاول})^{\text{العلم-الدليل}} \times (\text{الثانى})^{\text{الدليل}}$

- **قانون النسبة بين حدين متتاليين** $\frac{ع_{ر+1}}{ع_ر} = \frac{ن - ر + 1}{ر} \times \frac{أ}{س}$

  $= \frac{\text{ن–الاصغر+١}}{\text{الاصغر}} \times \frac{\text{الثانى}}{\text{الاول}}$
- **النسبة بين معاملى حدين متتاليين =** $\frac{\text{ن–الاصغر+١}}{\text{الاصغر}} \times \frac{\text{معامل الثانى}}{\text{معامل الاول}}$
- **قاعدة** $(س+أ)^ن + (س-أ)^ن = ٢(ع_١ + ع_٣ + ع_٥ + ...)$ **= ضعف الحدود الفردية**
- **قاعدة** $(س+أ)^ن - (س-أ)^ن = ٢(ع_٢ + ع_٤ + ع_٦ + ...)$ **= ضعف الحدود الزوجية**
- **لايجاد عدديا اكبر حد فى مفكوك نحل المتتباينة** $\frac{ع_{ر+1}}{ع_ر} = \frac{ن - ر + 1}{ر} \times \left|\frac{أ}{س}\right| \geq ١$
- **لايجاد مجموع المعاملات فى اى مفكوك نضع المتغيرات بـ ١ و نحسب**
-

الصورة المثلثية للعدد المركب

- **الصورة المثلثية للعدد المركب ع=ل(جتاθ + ت جاθ)**
- **سعة العدد المركب $\theta \in$] $-\pi$ ، π] ولعمل ذلك اذا كانت اكبر من ١٨٠ نطرح منها ٣٦٠ أو نضيف حتى يكون $\theta \in$] $-\pi$ ، π]**
- **اذا كان العدد ليس على الصورة المثلثية نحدد الربع الذى يقع فيه اذا كان ضبط اشارة فى الربع الثانى نستخدم π - θ ، فى الربع الثالث - π +θ فى الربع الرابع –θ حيث θ الزاوية الحادة**
- **اذا كان العدد ليس على الصورة المثلثية نحدد الربع الذى يقع فيه اذا كان ضبط جا ، جتا نستخدم فى الربع الثانى نستخدم $\frac{\pi}{٢}$ +θ ، فى الربع الثالث - $\frac{\pi}{٢}$-θ فى الربع الرابع - $\frac{\pi}{٢}$+θ حيث θ الزاوية الحادة**
- **الصورة الاسية للعدد المركب** $(ل\, هـ^{\theta ت})$ **لابد أن تكون الزاوية بالتقدير الدائرى وللتحويل نستخدم**

  $\frac{س^\circ}{١٨٠^\circ} \times \pi$
- **نتائج:**

  ❶ إذا كان ع=ل(جتاθ + ت جاθ) فإن

  (أ) $\frac{١}{ع} = \frac{١}{ل}$ **(جتا(-θ) + ت جا(-θ))** **(ب) ع^٢=ل^٢(جتا٢θ + ت جا٢θ)**

  ❷ إذا كان ع$_١$ = ل$_١$(جتا$\theta_١$ + ت جا$\theta_١$) ، ع$_٢$ =ل$_٢$(جتا$\theta_٢$ + ت جا$\theta_٢$)

  فإن ع$_١$× ع$_٢$= ل$_١$ ل$_٢$ (جتا($\theta_١$ +$\theta_٢$) + ت جا($\theta_١$ +$\theta_٢$))

نظرية ديموافر

- تذكر ١ = حا^{٢}هـ + جتا^{٢}هـ = (جاهـ + ت جتاهـ) (جاهـ - ت جتاهـ)
- نظرية ديموافر : إذا كان ن عدد صحيح موجب فإن $(\text{جتا}\theta + \text{ت جا}\theta)^{ن} = \text{جتا}ن\theta + \text{ت جا}ن\theta$
- نظرية ديموافر : باس عدد نسبى موجب

$$(\text{جتا}\theta + \text{ت جا}\theta)^{\frac{١}{ك}} = \text{جتا}\left(\frac{\theta + ٢\pi ن}{ك}\right) + \text{ت جا}\left(\frac{\theta + ٢\pi ن}{ك}\right)$$

حيث ن ∋ {٠ ، ١ ، ... ك-١ }

- جتاس = $\frac{هـ^{تس} + هـ^{-تس}}{٢}$ ، جاس = $\frac{هـ^{تس} - هـ^{-تس}}{٢ت}$ مفيدة للتكاملات
- الجذور النونية للمعادلة س^{ن}=م حيث م عدد مركب يكون لها ن من الجذور على الصورة س=أ$^{\frac{١}{ن}}$
- تحسب الجذور بعد كتابة العدد بالصورة الاسية أو المثلثية

الجذور النونية للعدد المركب تمثل على شكل ارجاند على دائرة واحدة مركزها نقطة الاصل وطول نصف قطرها $|أ|^{\frac{١}{ن}}$ وتكون رؤوس مضلع منتظم عدد أضلاعه ن

- **فكرة لايجاد الجذرين التربيعين للعدد المركب (تستخدم فى اختر)**

∴ الجذرين هما ± $\left[\sqrt{\frac{ل + س}{٢}} + ت\sqrt{\frac{ل - س}{٢}}\right]$ حيث ل مقياسه ، س جزءه الحقيقى

- جتاس + جتاص = ٢جتا $\frac{س + ص}{٢}$ جتا $\frac{س - ص}{٢}$
- جتاس - جتاص = ٢جا $\frac{س + ص}{٢}$ جا $\frac{س - ص}{٢}$
- جاس + جاص = ٢ جا $\frac{س + ص}{٢}$ جتا $\frac{س - ص}{٢}$
- جاس - جاص = ٢ جا $\frac{س - ص}{٢}$ جتا $\frac{س + ص}{٢}$
- جا س + جاص = ٢ جا (نصف المجموع) جتا (نصف الفرق)
- جا س - جاص = ٢ جا (نصف الفرق) جتا (نصف المجموع)
- جتاس + جتاص = ٢ جتا (نصف المجموع) جتا (نصف الفرق)
- جتاس - جتاص = ٢ جا (نصف المجموع) جا (نصف الفرق)
-

المحددات

- فك المحدد عن طريق أحد صفوفه أو اعمدته لا يغير من قيمة المحدد

أ/ربيع فايد معلم خبير الرياضيات

- ضرب أحد صفوف (أو اعمدة) المحدد فى رقم والجمع على الصف(أو العمود) المناظر لا يغير من قيمته
- عند أخذ عامل مشترك أو ضرب المحدد فى رقم يكون ذلك على صف أو عمود فقط
- لا تتغير قيمة المحدد عند تبديل صفوف المحدد باعمدته المناظرة بنفس الترتيب (مدور المحدد)
- قيمة المحدد لا تتغير بفكه عن طريق عناصر أى صف(عمود)
- قيمة المحدد تنعدم إذا كان جميع عناصر اى صف او عمود تساوى صفر
- قيمة المحدد تنعدم اذا تساوت العناصر المناظرة لاى صفين أو عمودين
- إذا وجد عامل مشترك فى جميع عناصر صف(عمود) فى محدد فإن هذا العامل يمكن اخذه خارج المحدد
- إذا بدلنا موضعى صفين(عمودين) فإن قيمة المحدد الناتج = سالب قيمة المحدد الاصلى
- اذا كتبت جميع عناصر أى صف (عمود) كمجموع عنصرين فإنه يمكن كتابة المحدد الاصلى على صورة مجموع محددين (تجزئى المحدد)
- اذا اضفنا لعناصر اى صف(عمود) بمحدد مضاعفات عناصر أى صف (عمود) أخر فإن قيمة المحدد لا تتغير
- فى أى محدد اذا ضربنا عناصر أى صف(عمود) فى العوامل المرافقة للعناصر المناظرة فى أى صف(عمود) آخر ثم جمعنا نواتج الضرب فإن الناتج يكون مساوياً صفرا
- قيمة المحدد على الصورة المثلثية (به مثلث اصفار) تساوى حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسى أو سالب حاصل ضرب عناصر القطر غير الرئيسى
-

المصفوفات

- شرط وجود معكوس ضربى للمصفوفة هو محددها لا ينعدم
- لايجاد المعكوس الضربى للمصفوفة $\text{أ}^{-1} = \frac{1}{|\text{أ}|}$ م$^{\text{مل}}$ حيث م$^{\text{مل}}$ مصفوفة العوامل المرافقة
- رتبة المصفوفة هى رتبة أكبر محدد فيها قيمته لا تساوى الصفر
- محدد عدد مضروب فى مصفوفة على ٣×٣ يساوى العدد^{3} × محددها

قاعدة إذا كانت م مصفوفة على النظم ن×ن فإن |كم | = ك$^{\text{ن}}$|م |

- ضرب عدد فى مصفوفة يضرب فى كل عناصرها بينما ضرب عدد فى محدد يضرب فى صف أو عمود فقط
- عامل مشترك من المصفوفة : من كل العناصر بينما عامل مشترك من محدد من صف أو عمود
- المصفوفة المنفردة (الشاذة) التى ليس لها معكوس ضربى وغير المنفردة (غير الشاذة) لها معكوس ضربى
- المصفوفة المنفردة محددها = صفر ، غير المنفردة محددها ≠ صفر
- $(\text{أب})^{-1} = \text{ب}^{-1}\text{أ}^{-1}$ ، $(\text{أ}^{-1})^{-1} = \text{أ}$ ، $(\text{أ}^{-1})^{\text{مد}} = (\text{أ}^{\text{مد}})^{-1}$ ، $(\text{أ}^{-1})^{2} = (\text{أ}^{2})^{-1}$ ، $I^{-1} = I$

حل المعادلات الخطية باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة

- إذا كانت رتبة المصفوفة م = رتبة المصفوفة الموسعة = عدد المجاهيل ∴ **حل وحيد**
- إذا كانت رتبة المصفوفة م = رتبة المصفوفة الموسعة < عدد المجاهيل ∴ **عدد لانهائى من الحلول**
- إذا كانت رتبة المصفوفة م ≠ رتبة المصفوفة الموسعة ∴ **لا يوجد حلول**
- المعنى الهندسى لمجموعة حل ثلاث معادلات فى ثلاث مجاهيل
  كل معادلة تمثل مستوى ولذلك حل وحيد معناه الثلاث مستويات تتقاطع فى نقطة
  عدد لانهائى من الحلول ∴ الثلاث مستويات منطبقة
  لا يوجد حلول ∴ الثلاث مستويات متوازية
- **المعادلات المتجانسة جميع عناصر مصفوفة الثوابت صفر وعلى الاقل لها حل واحد**
- مرتبة المصفوفة غير الصفرية هى أعلى درجة لمحدد أو محدد أصغر للمصفوفة قيمته لا تساوى صفر فإذا كانت المصفوفة م غير صفرية على النظم م × ن حيث م ≤ ن فإن مرتبة المصفوفة م نرمز لها بالرمز ر(م) حيث ١ ≤ ر(م) ≤ ن
- عند ايجاد مرتبة المصفوفة تذكر خواص المحدادت لتسريع ايجاد رتبة المصفوفة
- مرتبة مصفوفة الوحدة هو درجتها
- مرتبة المصفوفة الصفرية = صفر ، مرتبة المصفوفة = مرتبة مدورها
- إذا اضيف (أوحدف) صف(عمود) صفرى على المصفوفة فإن رتبتها لا تتغير
- إذا اضيف (أوحدف) صف(عمود) عبارة عن تجميع لعدة صفوف (أعمدة) فإن مرتبة المصفوفة لا تتغير
- **اسهل طريقة لايجاد مرتبة المصفوفة هو اجراء عمليات الصف البسيط على المصفوفة الموسعة فمن السهل ايجاد رتبة المصفوفة والمصفوفة الموسعة**

ثانيا الهندسة الفراغية

النظام الاحداثى المتعامد فى ثلاث أبعاد

- نقطة الاصل (٠ ، ٠ ، ٠)
  يجب رسم مستوى الاحداثيات طبقاً لقاعدة اليد اليمنى كما بالشكل

ع
ص
س

- النقطة (س ، ٠ ، ٠) تقع على محور السينات وتبعد عن المستوى ص ع مسافة |س|
  ، النقطة (٠ ،ص ،٠) تقع على محور الصادات وتبعد عن المستوى س ع مسافة |ص|
  ، النقطة (٠ ، ٠ ،ع) تقع على محور العينات وتبعد عن المستوى س ص مسافة |ع|
- بعد النقطة (س ، ص ، ع) عن محور السينات = $\sqrt{ص^2 + ع^2}$ لكن بعدها عن المستوى ص ع =|س|
  وبعدها عن محور الصادات = $\sqrt{س^2 + ع^2}$ لكن بعدها عن المستوى س ع =|ص|

- معادلة المستوى س ص هى ع=٠ ، معادلة المستوى ص ع هى س=٠ ، معادلة المستوى س ع هى ص=٠
- البعد بين النقطتين ﺃ(س١ ، ص١ ، ع١) ، ب(س٢ ، ص٢ ، ع٢) يساوى $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢ + (ع_٢ - ع_١)^٢}$
- احداثى نقطة المنتصف بين بين النقطتين ﺃ(س١ ، ص١ ، ع١) ، ب(س٢ ، ص٢ ، ع٢) هو $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} ، \frac{ع_١ + ع_٢}{٢}\right)$
- نقطة متوسطات المثلث الذى رؤوسه ﺃ(س١ ، ص١ ، ع١) ، ب(س٢ ، ص٢ ، ع٢) ، جـ(س٣ ، ص٣ ، ع٣) هى $\left(\frac{س_١ + س_٢ + س_٣}{٣} ، \frac{ص_١ + ص_٢ + ص_٣}{٣} ، \frac{ع_١ + ع_٢ + ع_٣}{٣}\right)$
- معادلة الكرة التى مركزها (ل، ك ، ن) و طول نصف قطرها نق هى الصورة القياسية $(س-ل)^٢ + (ص- ك)^٢ + (ع- ن)^٢ = نق^٢$
- الصورة العامة: $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ٢ل س + ٢ك ص + ٢ن ع + ء = ٠$ حيث مركزها (-ل ، - ك ، - ن) وطول نصف قطرها نق = $\sqrt{ل^٢ + ك^٢ + ن^٢ - ء}$

نلاحظ على معادلة الدائرة معامل $س^٢$ =معامل $ص^٢$=معامل $ع^٢$=١ ، لاتشتمل على الحدود س ص ، ص ع ، س ع ، وبشرط $ل^٢ + ك^٢ + ن^٢ - ء > ٠$

-

المتجهات فى الفراغ

- متجة الموضع للمتجة $\overrightarrow{ﺃ}$ =($ﺃ_س$ ، $ﺃ_ص$ ، $ﺃ_ع$) وتسمى $ﺃ_س$ بمركبة المتجة فى اتجاه محور س ، $ﺃ_ص$ بمركبة المتجة فى اتجاه محور ص ، $ﺃ_ع$ بمركبة المتجة فى اتجاه محور ع
- معيار المتجة $\overrightarrow{ﺃ}$ =($ﺃ_س$ ، $ﺃ_ص$ ، $ﺃ_ع$)= طول القطعة المستقيمة الموجهة = $\sqrt{ﺃ_س^٢ + ﺃ_ص^٢ + ﺃ_ع^٢}$
- جمع المتجهات إذا كان $\overrightarrow{ﺃ}$ =($ﺃ_س$ ، $ﺃ_ص$ ، $ﺃ_ع$) ، $\overrightarrow{ب}$ =($ب_س$ ، $ب_ص$ ، $ب_ع$) فإن $\overrightarrow{ﺃ} + \overrightarrow{ب}$ =($ﺃ_س$ ، $ﺃ_ص$ ، $ﺃ_ع$) +($ب_س$ ، $ب_ص$ ، $ب_ع$)=($ﺃ_س+ب_س$ ، $ﺃ_ص+ب_ص$ ، $ﺃ_ع+ب_ع$)
- ضرب عدد فى متجة ك $\overrightarrow{ﺃ}$ =($ﺃ_س$ ، $ﺃ_ص$ ، $ﺃ_ع$) =(ك$ﺃ_س$ ، ك$ﺃ_ص$ ، ك$ﺃ_ع$)
- تساوى متجهين إذا كان ($ﺃ_س$ ، $ﺃ_ص$ ، $ﺃ_ع$)=($ب_س$ ، $ب_ص$ ، $ب_ع$)
  ∴ $ﺃ_س = ب_س$ ، $ﺃ_ص = ب_ص$ ، $ﺃ_ع = ب_ع$
- متجة الوحدة هو متجه معياره وحدة الاطوال ، متجه الوحدة للمتجة $\overrightarrow{ﺃ}$ =($ﺃ_س$ ، $ﺃ_ص$ ، $ﺃ_ع$) هو $\left(\frac{ﺃ_س}{\|\overrightarrow{ﺃ}\|} ، \frac{ﺃ_ص}{\|\overrightarrow{ﺃ}\|} ، \frac{ﺃ_ع}{\|\overrightarrow{ﺃ}\|}\right)$
- متجهات الوحدة الاساسية $\overrightarrow{س}$=(١ ، ٠ ، ٠) ، $\overrightarrow{ص}$=(٠ ، ١ ، ٠)

، $\overrightarrow{\text{ع}} = (٠ ، ٠ ، ١)$

- $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}}$



- **زوايا الاتجاه وجيوب تمام الاتجاه لمتجه فى الفراغ**

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_{\text{س}} ، \text{أ}_{\text{ص}} ، \text{أ}_{\text{ع}})$ متجه فى الفراغ

وكانت $(\theta_{\text{س}} ، \theta_{\text{ص}} ، \theta_{\text{ع}})$ قياسات الزوايا التى يصنعها المتجه مع الاتجاه الموجب لمحاور س ، ص ، ع على الترتيب فإن:

$\text{أ}_{\text{س}} = \|\bar{\text{أ}}\| \text{جتا}\,\theta_{\text{س}}$ ، $\text{أ}_{\text{ص}} = \|\bar{\text{أ}}\| \text{جتا}\,\theta_{\text{ص}}$ ، $\text{أ}_{\text{ع}} = \|\bar{\text{أ}}\| \text{جتا}\,\theta_{\text{ع}}$

، $\overrightarrow{\text{أ}} = \|\bar{\text{أ}}\| \text{جتا}\,\theta_{\text{س}} \overrightarrow{\text{س}} + \|\bar{\text{أ}}\| \text{جتا}\,\theta_{\text{ص}} \overrightarrow{\text{ص}} + \|\bar{\text{أ}}\| \text{جتا}\,\theta_{\text{ع}} \overrightarrow{\text{ع}}$

$(\theta_{\text{س}} ، \theta_{\text{ص}} ، \theta_{\text{ع}})$ تسمى زوايا الاتجاه للمتجة $\overrightarrow{\text{أ}}$ ولايجادها نوجد متجه الوحدة فى اتجاهه $= \frac{\bar{\text{أ}}}{\|\bar{\text{أ}}\|}$

كل مركبة تعبر عن $\text{جتا}\,\theta_{\text{س}}$ ، $\text{جتا}\,\theta_{\text{ص}}$ ، $\text{جتا}\,\theta_{\text{ع}}$

- لاحظ أن $\text{جتا}\,\theta_{\text{س}} \overrightarrow{\text{س}} + \text{جتا}\,\theta_{\text{ص}} \overrightarrow{\text{ص}} + \text{جتا}\,\theta_{\text{ع}} \overrightarrow{\text{ع}}$ تمثل متجه الوحدة فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ أى أن $\text{جتا}^2\theta_{\text{س}} + \text{جتا}^2\theta_{\text{ص}} + \text{جتا}^2\theta_{\text{ع}} = ١$

ضرب المتجهات

- حاصل الضرب القياسى $\overrightarrow{\text{أ}} \odot \overrightarrow{\text{ب}} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\| \, \|\overrightarrow{\text{ب}}\| \text{جتا}\,\theta$ حيث θ الزاوية الحادة بين المتجهين بشرط أن يكونا داخلين أو خارجين من نقطة التقاطع
- شرط تعامد متجهين هو $\overrightarrow{\text{أ}} \odot \overrightarrow{\text{ب}} =$ صفر بينما شرط التوازى $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{٠}$ ، أ $\overrightarrow{\text{أ}} = \text{ك}\,\overrightarrow{\text{ب}}$
- إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_{\text{س}} ، \text{أ}_{\text{ص}} ، \text{أ}_{\text{ع}})$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (\text{ب}_{\text{س}} ، \text{ب}_{\text{ص}} ، \text{ب}_{\text{ع}})$ $\therefore \overrightarrow{\text{أ}} \odot \overrightarrow{\text{ب}} = \text{أ}_{\text{س}}\text{ب}_{\text{س}} + \text{أ}_{\text{ص}}\text{ب}_{\text{ص}} + \text{أ}_{\text{ع}}\text{ب}_{\text{ع}}$
- مركبة $\overrightarrow{\text{أ}}$ فى اتجاه $\overrightarrow{\text{ب}} = \frac{\bar{\text{أ}} \odot \bar{\text{ب}}}{\|\bar{\text{ب}}\|} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\| \text{جتا}\,\theta$
- $\overrightarrow{\text{أ}} \odot \overrightarrow{\text{أ}} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\|^2$ بينما $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{٠}$
- إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_{\text{س}} ، \text{أ}_{\text{ص}} ، \text{أ}_{\text{ع}})$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (\text{ب}_{\text{س}} ، \text{ب}_{\text{ص}} ، \text{ب}_{\text{ع}})$ **شرط التوازى** $\frac{\text{أ}_{\text{س}}}{\text{ب}_{\text{س}}} = \frac{\text{أ}_{\text{ص}}}{\text{ب}_{\text{ص}}} = \frac{\text{أ}_{\text{ع}}}{\text{ب}_{\text{ع}}}$
- $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ \text{أ}_{\text{س}} & \text{أ}_{\text{ص}} & \text{أ}_{\text{ع}} \\ \text{ب}_{\text{س}} & \text{ب}_{\text{ص}} & \text{ب}_{\text{ع}} \end{vmatrix}$

$= (\text{أ}_{\text{ص}}\text{ب}_{\text{ع}} - \text{أ}_{\text{ع}}\text{ب}_{\text{ص}}) \overrightarrow{\text{س}} - (\text{أ}_{\text{س}}\text{ب}_{\text{ع}} - \text{أ}_{\text{ع}}\text{ب}_{\text{س}}) \overrightarrow{\text{ص}} + (\text{أ}_{\text{س}}\text{ب}_{\text{ص}} - \text{أ}_{\text{ص}}\text{ب}_{\text{س}}) \overrightarrow{\text{ع}}$

$أ_س ب_ع - أ_ع ب_س$ =المركبة فى اتجاه محور س لاحظ $(أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$ ، $(ب_س ، ب_ص ، ب_ع)$

- $(أ_س ب_ع - أ_ع ب_س)$ =المركبة فى اتجاه محور ص لاحظ $(أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$ ، $(ب_س ، ب_ص ، ب_ع)$

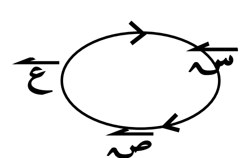
$(أ_س ب_ص - أ_ص ب_س)$ =المركبة فى اتجاه محور ع لاحظ $(أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$ ، $(ب_س ، ب_ص ، ب_ع)$

- قياس الزاوية بين متجهين جتاθ = $\frac{\overrightarrow{أ} \odot \overrightarrow{ب}}{\|\overrightarrow{أ}\| \, \|\overrightarrow{ب}\|}$ لاتنسى داخلين أو خارجين ، $\theta \in [٠ ، \pi]$

حالات خاصة:

① جتاθ = ١ ∴ $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متوازيان فى نفس الاتجاه
② جتاθ =-١ ∴ $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متوازيان فى عكس الاتجاه
③ جتاθ = ٠ ∴ $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متعامدان

- $\overrightarrow{س} \odot \overrightarrow{س} = ١$ ، $\overrightarrow{س} \odot \overrightarrow{ص} = ٠$ ، .... $\overrightarrow{س} \times \overrightarrow{س} = \overrightarrow{٠}$ ، $\overrightarrow{س} \times \overrightarrow{ص} = \overrightarrow{ع}$
، $\overrightarrow{ص} \times \overrightarrow{ع} = \overrightarrow{س}$



- الشغل المبذول من القوى التى تؤثر على الجسم فاكسبته ازاحه
$\overrightarrow{ش} = \overrightarrow{ق} \odot \overrightarrow{ف} = \|\overrightarrow{ق}\| \, \|\overrightarrow{ف}\|$ جتاθ
- $\|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}\|$ =مساحة متوازى الاضلاع الذى فيه $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ضلعين متجاورين
= ضعف مساحة المثلث الذى فيه $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ضلعين متجاورين
- الضرب الثلاثى القياسى $\overrightarrow{أ} \odot \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{جـ} = \begin{vmatrix} أ_س & أ_ص & أ_ع \\ ب_س & ب_ص & ب_ع \\ جـ_س & جـ_ص & جـ_ع \end{vmatrix}$ =حجم متوازى السطوح الذى فيه

$\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{جـ}$ ثلاث اضلاع متجاورة
لاحظ لا معنى لايجاد الضرب القياسى أولاً ، كذلك الترتيب

- إذا كانت الثلاث متجهات $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{جـ}$ فى مستوى واحد فإن $\overrightarrow{أ} \odot \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{جـ}$ = صفر
- متجة الوحدة العمودى على المستوى الذى يحتوى $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ يساوى $\frac{\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}}{\|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}\|}$
- **حالة خاصة** : إذا كان إذا كان $\overrightarrow{أ} = (أ_س ، أ_ص)$ ، $\overrightarrow{ب} = (ب_س ، ب_ص)$
فإن $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = (أ_س ب_ص - أ_ص ب_س)\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{أ} \odot \overrightarrow{ب} = (أ_س ب_س + أ_ص ب_ص)$

خواص ضرب المتجهات ، ضرب عدد فى متجهة ، ....

معادلة المستقيم فى الفراغ

- متجه اتجاه المستقيم المار بالنقطتين $أ(أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$ ، $ب(ب_س ، ب_ص ، ب_ع)$
هو $\overrightarrow{هـ} = \overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$

- المعادلة المتجهة للمستقيم المار بالنقطة $\overleftarrow{أ}$ ومتجه اتجاهه $\overleftarrow{هـ}$ هى $\overleftarrow{ر} = \overleftarrow{أ} + ك \overleftarrow{هـ}$
- المعادلات البارامترية من المعادلة المتجهة (س ، ص ، ع) =(س$_1$ ،ص$_1$ ،ع$_1$) + ك(أ ، ب ،جـ)
  هى س=س$_1$+ ك أ ، ص = ص$_1$ + ك ب ، ع = ع$_1$ + ك جـ
- المعادلة الاحداثية للمستقيم المار بالنقطة (س$_1$ ،ص$_1$ ،ع$_1$) ومتجه اتجاهه (أ ، ب ،جـ)
  هى $\frac{س - س_1}{أ} = \frac{ص - ص_1}{ب} = \frac{ع - ع_1}{جـ}$ عند أ = ٠ تكون المعادلة س = س$_1$ ، $\frac{ص - ص_1}{ب} = \frac{ع - ع_1}{جـ}$
- نسب الاتجاه أ ، ب ، جـ تتناسب مع جيوب تمام الاتجاه ل ، م ، ن فإنه يمكن كتابة الصورة الاحداثية لمعادلة المستقيم على الصورة $\frac{س - س_1}{ل} = \frac{ص - ص_1}{م} = \frac{ع - ع_1}{ن}$
- قياس الزاوية بين المستقيمين الذى متجهى اتجاهيهما $\overleftarrow{هـ_1}$ ، $\overleftarrow{هـ_2}$ جتا $\theta = \frac{|\overleftarrow{هـ_1} \bullet \overleftarrow{هـ_2}|}{\|\overleftarrow{هـ_1}\| \|\overleftarrow{هـ_2}\|}$
- إذا (ل$_1$ ، م$_1$ ، ن$_1$) ، (ل$_2$ ، م$_2$ ، ن$_2$) هى جيوب تمام الاتجاه للمستقيمين
  فإن: جتا θ = | ل$_1$ل$_2$ + م$_1$م$_2$ + ن$_1$ن$_2$|
- شرط توازى مستقيمين فى الفراغ $\overleftarrow{هـ_1}$ = ك $\overleftarrow{هـ_2}$
- إذا كان المستقيمان متوازيين وكانت نقطة على أحداهما تحقق الآخر فإن المستقيمين منطبقان
- إذا كان $\overleftarrow{هـ_1}$ لا يوازى $\overleftarrow{هـ_2}$ فإن ل$_1$ ، ل$_2$ إما متقاطعان أو متخالفان
- **طول العمود من النقطة ب على المستقيم** $\overleftarrow{ر} = \overleftarrow{أ} + ك \overleftarrow{هـ}$ يساوى = $\frac{\|\overleftarrow{اب} \times \overleftarrow{هـ}\|}{\|\overleftarrow{هـ}\|}$
- شرط تخالف مستقيمين فى الفراغ هو عدم التقاطع وعدم التوازى

معادلة المستوى فى الفراغ

- المعادلة المتجهة للمستوى الذى يمر بالنقطة $\overleftarrow{أ}$ ، ومتجه عمودى عليه $\overleftarrow{ن}$
  هى $\overleftarrow{ن} \odot \overleftarrow{ر} = \overleftarrow{ن} \odot \overleftarrow{أ}$
- المعادلة القياسية لمعادلة المستوى أ(س − س$_1$) + ب(ص − ص$_1$)+جـ(ع − ع$_1$) = ٠ حيث
  (أ ، ب ، جـ) نسب الاتجاه لمتجه عمودى على المستوى المار بالنقطة (س$_1$ ،ص$_1$ ،ع$_1$)
- والمعادلة العامة هى أ س + ب ص + جـ ع + ى = ٠ حيث (أ ، ب ، جـ) نسب الاتجاه لمتجه عمودى على المستوى
- لايجاد معادلة المستوى المار بثلاث نقاط يجب التأكد أولاً أن النقط ليست على استقامة واحدة من شرط التوازى ثم نوجد متجه عمودى على مستويهما واى نقطة ونوجد معادلة المستوى
- معادلة المستوى المار بالثلاث نقاط (س$_1$ ،ص$_1$ ،ع$_1$) ، (س$_2$ ،ص$_2$ ،ع$_2$) ، (س$_3$ ،ص$_3$ ،ع$_3$)

  هى $\begin{vmatrix} س - س_1 & ص - ص_1 & ع - ع_1 \\ س_2 - س_1 & ص_2 - ص_1 & ع_2 - ع_1 \\ س_3 - س_1 & ص_3 - ص_1 & ع_3 - ع_1 \end{vmatrix}$

أو نوجد متجه وحدة عمودى على مستويهما $\overrightarrow{\text{ن}} = \overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{بجـ}}$ وناخذه نقطة منهما ونكون المعادلة بالعلاقة $\overrightarrow{\text{ن}} \odot \overrightarrow{\text{ر}} = \overrightarrow{\text{ن}} \odot \overrightarrow{\text{أ}}$

- لايجاد معادلة المستوى الذى يحوى مستقيمين متقاطعين نوجد نقطة التقاطع بحل المعادلتين معاً ثم نوجد متجه عمودى على مستويهما $= \overrightarrow{\text{هـ}_1} \times \overrightarrow{\text{هـ}_2}$ فيكون هو متجه اتجاه العمودى على المستوى
- لايجاد معادلة مستقيم عمودى على مستوى يكون متجه اتجاه المستقيم هو متجه اتجاه العمودى على المستوى
- لايجاد معادلة خط تقاطع مستويين نحل المعادلتين
- لايجاد نقطة تقاطع مستقيم مع مستوى نوجد المعادلات البارمترية للمستقيم ونعوض فى معادلة المستوى ينتج ك
- قياس الزاوية θ بين المستويين الذى $\overrightarrow{\text{ن}_1}$ عمودى على المستوى الاول ، $\overrightarrow{\text{ن}_2}$ عمودى على المستوى الثانى هى جتا$\theta = \frac{|\overrightarrow{\text{ن}_1} \odot \overrightarrow{\text{ن}_2}|}{\|\overrightarrow{\text{ن}_1}\| \, \|\overrightarrow{\text{ن}_2}\|}$ حيث $0° \le \theta \le 90°$
- إذا كان $\overrightarrow{\text{ن}_1}$ ، $\overrightarrow{\text{ن}_2}$ متجهى الاتجاه العموديين على المستويين فإن

❶ شرط توازى مستويين $\overrightarrow{\text{ن}_1} \parallel \overrightarrow{\text{ن}_2}$ أى إذا كان $\frac{\text{أ}_1}{\text{أ}_2} = \frac{\text{ب}_1}{\text{ب}_2} = \frac{\text{جـ}_1}{\text{جـ}_2}$ أو $\overrightarrow{\text{ن}_1} \times \overrightarrow{\text{ن}_2} = \overrightarrow{\text{و}}$

❷ شرط تعامد المستويين $\overrightarrow{\text{ن}_1} \perp \overrightarrow{\text{ن}_2}$ هو $\overrightarrow{\text{ن}_1} \odot \overrightarrow{\text{ن}_2} =$ صفر

- طول العمود من النقطة ب على المستوى الذى معادلته $\overrightarrow{\text{ن}} \odot \overrightarrow{\text{ر}} = \overrightarrow{\text{ن}} \odot \overrightarrow{\text{أ}}$ يساوى $\frac{|\overrightarrow{\text{أب}} \odot \overrightarrow{\text{ن}}|}{\|\overrightarrow{\text{ن}}\|}$ لاحظ ضرب قياسى بخلاف طول العمود على مستقيم ضرب اتجاهى
- طول العمود من النقطة أ(س₁ ، ص₁ ، ع₁) على المستوى أس + ب ص + جـ ع + د = ٠

$$= \frac{|\text{أ}\text{س}_1 + \text{ب}\text{ص}_1 + \text{جـ}\text{ع}_1 + \text{د}|}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2 + \text{جـ}^2}}$$

- معادلة المستوى الذى يقطع محاور الاحداثيات فى النقط $(\text{س}_1 ، ٠ ، ٠)$ ، $(٠ ، \text{ص}_1 ، ٠)$ ، $(٠ ، ٠ ، \text{ع}_1)$ فإن معادلة المستوى تكون على الصورة $\frac{\text{س}}{\text{س}_1} + \frac{\text{ص}}{\text{ص}_1} + \frac{\text{ع}}{\text{ع}_1} = 1$
- معادلة المستوى المار بخط تقاطع مستويين هى (معادلة المستوى الاول) + ك(معادلة الثانى)=٠

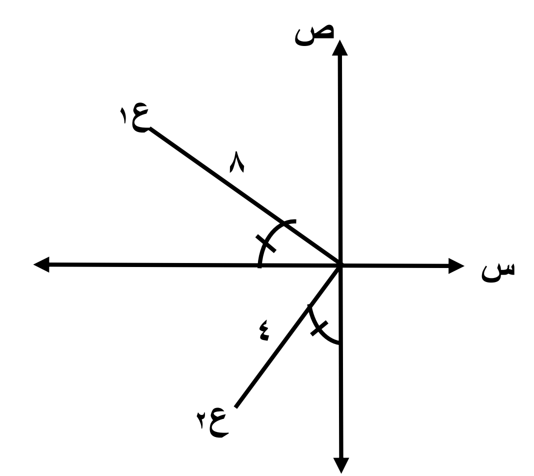
أولا:الاسئلة الموضعية(أختر الاجابة الصحيحة مما بين القوسين)

(بوكلت ١)

[١] اذا قطع المستوى ١٠س + ١٢ص + ٦ع = ٦٠ محاور الاحداثيات س ، ص ، ع فى النقط ؟ ، ب ، جـ على الترتيب فإن حجم المجسم ؟ ب جـ و حيث و نقطة الاصل يساوى ..... وحدة مكعبة

(٢٠ ، ٣٠ ، ٥٠ ، غير ذلك)

[٢] فى الشكل المقابل:



ع١ ، ع٢ عددان مركبان فإن $\frac{ع_١}{ع_٢}$ = ...

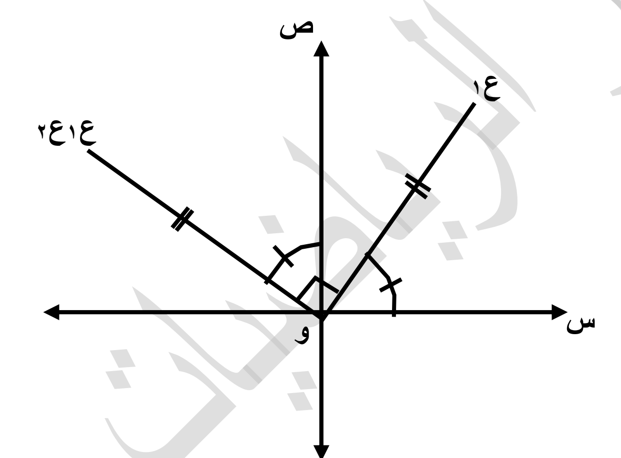
(٢ ، -٢ ، ٢ت ، -٢ت)

[٣] اذا كان ع١ ، ع٢ عددان مركبان سعة (ع١ع٢) = $\frac{٥\pi}{١٨}$ ، سعة $\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{\pi}{٩}$

فإن سعة ع١ = ... ($\frac{٧\pi}{٣٦}$ ، $\frac{٥\pi}{٣٦}$ ، $\frac{\pi}{٣}$ ، $\frac{\pi}{٤}$)

[٤] اذا كان عدد حدود مفكوك $(س + ص)^{٢ن-١}$ يساوى ١٢ فإن ن تساوى .... (٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨)

[٥] فى الشكل المقابل:



ع١ ، ع٢ عددان مركبان وكان (ع١ع٢) عدد مركب

فإن ع٢ = ...

(-٢ت ، -ت ، ت ، ٢ت)

[٦] طول نصف قطر الكرة $س^٢ + ص^٢ + ع^٢$ -٢س -٦ص +١٠ ع -١ = صفر يساوى .... وحدة طول (٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦)

[٧] اذا كان ؟ =(٢ ، -١ ، ٣) ، ب=(-٢ ، ٢ ، -٩) فإن طول ؟ ب = ... وحدة طول

(١٠ ، ١٢ ، ١٣ ، ١٥)

[٨] اذا كان $\overrightarrow{أ}$ =(٢ ، ٣ ، -٤) ، $\overrightarrow{ب}$ =(٤ ، ٢ ، م) وكان $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$

فإن قيمة م = ... (١ ، ٢ ، ٣ ، $\frac{٧}{٢}$)

[٩] فى الشكل المقابل: أ ب جـ ء مستطيل ،

هـ ∈ $\overline{أ ء}$ فإن $\overrightarrow{هـ ب} \bullet \overrightarrow{هـ جـ}$ = ...

(٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠)

أ ٣سم هـ ٦سم ء ، ٥سم ، ب ، جـ

[١٠] عدد الطرق التى يمكن تكوين بها فريق من سته اعضاء من بين ثمانية بنات وستة أولاد بحيث يحتوى الفريق على ثلاث أولاد فقط يساوى .... (٢١١٠ ، ١١٢٠ ، ١٠٠٨ ، ٨١٠)

[١١] $\sqrt{٥ + ٢\sqrt{٦}ت}$ = ... (±(٢+٣ت) ، ±(٣+٢ت) ، ±(٢-٣ت) ، ±(٣-٢ت))

[١٢] اذا كان اطوال اضلاع مثلث هى $\frac{١}{٢}\lfloor ن$ ، $\lfloor ن - ٢$ ، $\lfloor ٣ - ن$ من السنتيمترات فإن القيمة العددية لمساحة المثلث = ... سم^٢ ($\sqrt{٣}$ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ ، $\frac{٢\sqrt{٣}}{٣}$)

(بوكلت٢)

[١٣] اذا كان الحدان الاوسطان فى مفكوك $\left(س^٢ + \frac{١}{س}\right)^{٢ن+١}$ متساويان فإن س = ...

(١ ، -١ ، ±١ ، ٢)

[١٤] اذا كان $^{ن}ل_{س} = {}^{ن}ل_{ص}$ حيث س ≠ ص فإن س +ص = ... (٥ ، ٧ ، ٩ ، ١)

[١٥] اذا كان ٣٠° ، ٦٠° ، θ° هى زوايا الاتجاه لمتجه فإن إحدى قيم θ = ...

(٠° ، ٣٠° ، ٦٠° ، ٩٠°)

[١٦] إذا كان المتجهان $\overrightarrow{أ}$ =(٣ ، ٤ ، ك) ، $\overrightarrow{ب}$ =(٤ ، ٠ ، -١) متعامدين فإن $\|\overrightarrow{أ}\|$ = ...

(١٩ ، ١٣ ، ١٢ ، ٥)

[١٧] جميع المصفوفات الآتية لها معكوس ضربى ما عدا المصفوفة ....

(أ) $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$

(جـ) $\begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٦ \end{pmatrix}$

الأستاذ ربيع فايد معلم خبير الرياضيات

[١٨] $\begin{vmatrix} \omega & ت \\ ت & \omega \end{vmatrix}$ = ... (١ ، -١ ، ω ، - ω)

[١٩] مرافق العدد ٢ω + ٣ω^٢ هو .... (٢ω-٣ω^٢ ، ٢ω^٢+٣ω ، ٣ω -٢ω^٢ ، ٢ω +٣ω^٢)

[٢٠] إذا كان المستقيمان $\overleftarrow{ر}$ =(١ ، ٢ ، ٤) + ك(٢ ، -١ ، ١) ، $\frac{س-١}{-٢} = \frac{ص-١}{٧} = \frac{ع-١}{م}$

متعامدين فإن م = ... (١ ، ٥ ، ٦ ، ١١)

[٢١] إذا كان $^{ن}ل_{ر}$ = ١٢٠ فإن مجموع قيم ر الممكنة يساوى ..... (٥ ، ١٣ ، ٢٠ ، ١٢٠)

[٢٢] إذا كان $\overleftarrow{أ}$ • $\overleftarrow{ب}$ = $\sqrt{٣}$ || $\overleftarrow{أ}$ × $\overleftarrow{ب}$ || فإن قياس الزاوية بين المتجهين $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ =.......

(٣٠° ، ٤٥° ، ٦٠° ، ٩٠°)

[٢٣] قياس الزاوية بين المستويين $\overleftarrow{ر}$ • (١ ، ١ ، ٢) =٧ ، ٢س – ص + ع = ٦ تساوى ......

(٣٠° ، ٤٥° ، ٦٠° ، ٩٠°)

[٢٤] مجموع الاجزاء التى يقطعها المستوى ٣س + ٢ص + ٤ع = ١٢ من محاور الاحداثيات ......

(٩ ، ١٢ ، ١٣ ، ١٧)

(بوكلت٣)

[٢٥] أى القيم التالية يمكن أن تساوى $^{ن}ل_{٣}$ .... (٤٠ ، ١٤٠ ، ٢١٠ ، ٢٨٠)

[٢٦] اذا كان $\overleftarrow{أ}$ =(-١ ، ٤ ، ٣) ، $\overleftarrow{ب}$ =(٢ ، ٢ ، ١) فإن مركبة المتجة $\overleftarrow{أ}$ فى اتجاه المتجه

$\overleftarrow{ب}$ = ... ($\frac{٩}{\sqrt{٢٦}}$ ، $\frac{٣}{\sqrt{٢٦}}$ ، ٣ ، ١)

[٢٧] اذا كان المستقيمان $\frac{س-١}{٢} = \frac{ص+٢}{٣} = \frac{ع-١}{٤}$ ، $\frac{س}{٣} = \frac{ص-٢}{٤} = \frac{ع-١}{ك}$

متعامدين فإن ك = ... ($\frac{-١٩}{٤}$ ، $\frac{-١٧}{٤}$ ، -٤,٥ ، ٤,٥)

[٢٨] طول قطر الكرة التى معادلتها: س^٢ +ص^٢ -٦س +٨ص -٤ع + ٤ =٠ يساوى ....

وحدة طول (٥ ، ١٠ ، ١٥ ، ٢٠)

[٢٩] عدد طرق اختيار أربعة أحرف على الأقل مختلفة معاً من عناصر المجموعة

{ أ ، ب ، جـ ، ء ، هـ } هى .... ($^{٥}ق_{٤}$ + $^{٥}ق_{٥}$ ، $^{٥}ق_{٤}$ × $^{٥}ق_{٥}$ ، $^{٥}ل_{٤}$ + $^{٥}ل_{٥}$ ، $^{٥}ل_{٤}$ × $^{٥}ل_{٥}$)

الربيع فايد معلم خبير الرياضيات

[٣٠] حجم متوازى السطوح الذى فيه ثلاثة أحرف متجاورة يمثلها $\overrightarrow{\text{م}}$ =(٣ ، -٤ ، ٠)

، $\overrightarrow{\text{ب}}$ =(٠ ، -٤ ، ٣) ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ =(٠ ، ٠ ، ٥) يساوى .... وحدة مكعبة (١٢ ، ٥٠ ، ٦٠، ١٢٥)

[٣١] اذا قطع محور السينات الكرة (س-٢)^{٢} +(ص+٣)^{٢} + (ع-١)^{٢} =١٤ فى النقطتين م ، ب

فإن طول $\overline{\text{م ب}}$ = ... وحدة طول (٢ ، $\sqrt{١٤}$ ، ٤ ، $\sqrt{٢٨}$)

[٣٢] فى مفكوك (٣س – ٢ص)^{١٣} إذا كانت النسبة بين الحدين الأوسطين على الترتيب تساوى $\frac{-٢}{٣}$

فإن ص : س = ... (٩ : ٤ ، ٤ : ٩ ، ١ ، -١)

[٣٣] عدد طرق توزيع ثمانية جوائز بالتساوى على ٤ طلاب تساوى ....

(٣٥ ، ٥٦ ، ٢٥٢٠ ، ٤٠٣٢٠)

[٣٤] اذا كان ω ، ω^{٢} هى الجذور التكعيبية الغير حقيقة للواحد الصحيح فإن مجموعة حل المعادلة

س^{٣} = ٨ فى $\overline{\text{ك}}$ هى ....

({٢} ، { ٢ ، ٢ω ، ٤ ω^{٢} } ، { ٢ ، ٢ω ، ٢ ω^{٢} } ، { ٨ ، ٨ω ، ٨ ω^{٢} })

[٣٥] $\begin{vmatrix} \text{أب} & \text{أ} & \frac{1}{\text{جـ}} \\ \text{أجـ} & \text{جـ} & \frac{1}{\text{ب}} \\ \text{بجـ} & \text{ب} & \frac{1}{\text{أ}} \end{vmatrix}$ **= .... (صفر ، ب جـ ، ١ ، ٢)**

[٣٦] المستقيمان س س َ ، ع ع َ يكون مستوى الاحداثيات الذى معادلته ....

(س = ٠ ، ص=٠ ، ع = ٠ ، ص=٢)

(بوكلت ٤)

[٣٧] اذا كان $\frac{\text{ن}^{\text{ل}}_{\text{٥}}}{\text{ن}^{\text{ل}}_{\text{٤}}} = ٤$ فإن ن = ... (٥ ، ٩ ، ٢٤ ، ٢٥)

[٣٨] مجموع معاملات حدود مفكوك (١+ س – ٣س^{٢})^{٢٠١٧} يساوى ...... (-١، ١ ، ٠ ، ٢٠١٧)

[٣٩] اذا كان م(٢ ، ١ ، ٠) ، ب(١ ، ١ ، ٠) فإن متجه الوحدة فى اتجاه $\overrightarrow{\text{م ب}}$ هو ......

($\overrightarrow{\text{س}}$ ، $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ع}}$ ، - $\overrightarrow{\text{س}}$)

[٤٠] حجم متوازى السطوح الذى فيه ثلاثة احرف متجاورة يمثلها المتجهات $\overrightarrow{\text{م}}$ =(٢ ، ١ ، ٣) ،

الربيع فايد معلم خبير الرياضيات

$\overrightarrow{ب}$ =(-١ ، ٣ ، ٢) ، $\overrightarrow{جـ}$ =(١ ، ١ ، -٢) يساوى .... (٢٢ ، ٢٤ ، ٢٨ ، ٣٠)

[٤١] اذا كان ع عدد مركب ، فإن مجموع جذور المعادلة $(ع - ٢)^{٣}$ = ١ يساوى ..... (٠ ، ٢ ، ١ ، ٦)

[٤٢] اذا كانت م مصفوفة على النظم ٣×٣ وكان | م | = ٢ فإن | ٣ م | = ...

(٥٤ ، ٣٦ ، ١٨ ، ٦)

[٤٣] طول نصف قطر الكرة $س^{٢}$ + $ص^{٢}$ + $ع^{٢}$ - ٤س + ٦ص - ٢ع + ٥ = ٠ يساوى ....

(١ ، ٢ ، ٣ ، $\sqrt{١٩}$)

[٤٤] أوجد نقطة على المستقيم $\frac{س}{٣} = \frac{ص+١}{١} = \frac{ع-٣}{٢}$ بحيث يكون احداثيها السينى ضعف احداثيها الصادى ....[(-٦ ، -٣ ، -١) ، (٤ ، ٢ ، -١) ، (٦ ، ٣ ، -١) ، (٢ ، ١ ، -١)]

[٤٥] اذا كان ω ، $ω^{٢}$ هى الجذور التكعيبية الغير حقيقة للواحد الصحيح فإن

$\frac{أ+ب\omega+جـ\omega^{٢}}{جـ+أ\omega+ب\omega^{٢}} + \frac{أ+ب\omega+جـ\omega^{٢}}{ب+جـ\omega+أ\omega^{٢}}$ = ... (-١ ، صفر ، ١ ، ٢)

[٤٦] طول العمود الساقط من النقطة (٣ ، ١ ، -١) على المستوى س + ع = ٦ يساوى ......

(١ ، ٢ ، $\sqrt{٢}$ ، ٢$\sqrt{٢}$)

[٤٧] اذا كان المستويان ٢س + ص - ع = ٥ ، س - ٣ص + ك ع = ٢ متعامدين

فإن ك = ... (١ ، ٢ ، ٣ ، ٤)

[٤٨] اذا كانت المصفوفة م = $\begin{pmatrix} ١ & -٢ & -٣ \\ -٢ & ٤ & ٦ \\ ٣ & -٦ & -٩ \end{pmatrix}$ فإن ر(م) (م) = ... (٠ ، ١ ، ٢ ، ٣)

أ/ ربيع فايد معلم خبير الرياضيات

اجابات الاسئلة الموضعية

(١) ٥٠	(٢) -٢ت	(٣) $\frac{٧\pi}{٣٦}$
(٤) ٦	(٥) ت	(٦) ٦
(٧) ١٣	(٨) $\frac{٧}{٢}$	(٩) ٧
(١٠) ١١٢٠	(١١) ±(٣+٢ت)	(١٢) $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$
(١٣) ١	(١٤) ٩	(١٥) °٩٠
(١٦) ١٣	(١٧) (د)	(١٨) - ω
(١٩) ٢ω² +٣ω	(٢٠) ١١	(٢١) ١٣
(٢٢) °٣٠	(٢٣) °٦٠	(٢٤) ١٣
(٢٥) ٢١٠	(٢٦) ٣	(٢٧) -٤,٥
(٢٨) ١٠	(٢٩) $ق^{\circ}_{٤} + ق^{\circ}_{٥}$	(٣٠) ٦٠
(٣١) ٤	(٣٢) ٩ : ٤	(٣٣) ٢٥٢٠
(٣٤) {٢ ، ٢ω ، ٢ω²}	(٣٥) صفر	(٣٦) ص=٠
(٣٧) ٢٤	(٣٨) -١	(٣٩) $-\bar{س}$
(٤٠) ٢٨	(٤١) ٦	(٤٢) ٥٤
(٤٣) ٣	(٤٤) (-٦ ، -٣ ، -١)	(٤٥) -١
(٤٦) $٢\sqrt{٢}$	(٤٧) ١	(٤٨) ١
(٤٩)	(٥٠)	(٥١)
(٥٢)	(٥٣)	(٥٤)
(٥٥)	(٥٦)	(٥٧)
(٥٨)	(٥٩)	(٦٠)

أ/ ربيع فايد معلم خبير الرياضيات

ثانيا:الاسئلة المقالية

(بوكلت ١)

[١] أوجد قياس الزاوية المحصورة بين المستقيم ل: $\frac{س - ٣}{\sqrt{٢}} = \frac{ص - ١}{١} = \frac{- ع - ٢}{١}$

والمستوى $\sqrt{٢}$ س – ص – ع + ٥ = صفر



هـ١ =($\sqrt{٢}$ ، ١ ، -١) ، هـ٢=($\sqrt{٢}$ ، -١ ، -١) نوجد الزاوية بين المستقيم والعمودى على المستوى

∴ جتا θ = $\frac{|(\sqrt{٢} ، ١ ، -١) \bullet (\sqrt{٢} ، -١ ، -١)|}{\sqrt{٢+١+١}\ \sqrt{٢+١+١}} = \frac{١}{٢}$ ∴ θ = ٦٠°

∴ قياس الزاوية بين المستقيم والمستوى = ٩٠ – ٦٠ = ٣٠°

[٢] اذا كانت المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} ٥ & ١ & -٢ \\ -أ & ٠ & أ^{٢} - ب \\ ب^{٢} + أ & ٠ & ب \end{pmatrix}$ وكان أ × ب = -٣

وكان مرتبة المصفوفة أ يساوى ٢ أوجد قيمة $أ^{٦} + ب^{٦}$



∵ مرتبة المصفوفة أ يساوى ٢ ∴ $\begin{vmatrix} ٥ & ١ & -٢ \\ -أ & ٠ & أ^{٢} - ب \\ ب^{٢} + أ & ٠ & ب \end{vmatrix}$ = ٠ بفك المحدد عن طريق العمود الثانى

∴ –[($أ^{٢}$ - ب)($ب^{٢}$ + أ) + أ ب] = ٠ ∴ $أ^{٢}ب^{٢}$ - $ب^{٣}$ + $أ^{٣}$ - أ ب + أ ب = ٠

∴ $(-٣)^{٢}$ + $أ^{٣}$ - $ب^{٣}$ = ٠ ∴ $أ^{٣}$ - $ب^{٣}$ =٩ بتربيع الطرفين ∴ $أ^{٦}$ + $ب^{٦}$ - ٢$أ^{٣}ب^{٣}$ = ٨١

∴ $أ^{٦}$ + $ب^{٦}$ = ٨١ + ٢$(-٣)^{٣}$ = ٨١ - ٥٤ = ٢٧

[٣] بدون فك المحدد أثبت أن $\begin{vmatrix} ١ & ٤ & ١ \\ ٠ & -١ & ٢ \\ ٤ & ١٨ & ٠ \end{vmatrix}$ = صفر



ربيع فايد معلم خبير الرياضيات

باجراء ص٢ - ٢ص١ ∴ $\begin{vmatrix} ١ & ٤ & ١ \\ -٢ & -٩ & ٠ \\ ٤ & ١٨ & ٠ \end{vmatrix}$ باخذ عامل مشترك من ص٢ ، ص٣

= $-٢ \begin{vmatrix} ١ & ٤ & ١ \\ ٢ & ٩ & ٠ \\ ٢ & ٩ & ٠ \end{vmatrix}$ = ٠ لان ص٢ = ص٣

[٤] أوجد حجم متوازى السطوح الذى فيه ثلاث احرف متجاورة ممثله بالمتجهات

-١٢ س⃗ - ٣ ع⃗ ، ٣ ص⃗ – ع⃗ ، ٢ س⃗ + ص⃗ - ١٥ ع⃗



حجم متوازى السطوح = | $\begin{vmatrix} -٣ & ٠ & -١٢ \\ -١ & ٣ & ٠ \\ -١٥ & ١ & ٢ \end{vmatrix}$ |= |-١٢(-٤٥+١) -٣(٠-٦)| = ٥٤٦

[٥] كرة تمس المستويات س ع ، س ص ، ص ع فى النقط أ ، ب ، جـ على الترتيب ، أء قطر فيها حيث ء(٣ ، ٦ ، ٣) أوجد معادلة الكرة



∵ الكرة تمس المستويات س ع ، س ص ، ص ع ∴ نق = ٣ ، مركزها =(٣ ، ٣ ، ٣)

∴ معادلة الكرة (س-٣)^٢ + (ص - ٣)^٢ + (ع - ٣)^٢ = ٩

[٦] أوجد جميع قيم ن ، ر التى تجعل $^{ن+١}ل_{ر+١}$ =١٢٠



ر + ١ = ١ ∴ ر = ٠ ، ن = ١١٩ أ، $^{ن+١}ل_{ر+١}$ = ٦×٥×٤ ∴ ر=٢ ، ن =٥

أ، $^{ن+١}ل_{ر+١}$ = ٥×٤×٣×٢ ∴ ر=٣ ، ن = ٤ أ، $^{ن+١}ل_{ر+١}$ = ٥×٤×٣×٢×١ ∴ ر=٤ ، ن =٤

∴ ر ∈ {٠ ، ٢ ، ٣ ، ٤} ، ن ∈ {١١٩ ، ٥ ، ٤ }

[٧] اذا كان سعة (ع + ت) = $\frac{\pi}{٤}$ ، سعة (ع – ٣) = $\frac{٣\pi}{٤}$

أوجد ع على الصورة الجبرية حيث ع عدد مركب

الأستاذ ربيع فايد معلم خبير الرياضيات

نفرض ع= س + ت ص ∴ ع + ت = س + (ص+١)ت ∴ سعته $\frac{\text{ص}+1}{\text{س}}$ =ظا٤٥

∴ س = ص + ١ ⇐ (١) ، ع - ٣ = (س - ٣) + ص ت ∴ سعته $\frac{\text{ص}}{\text{س}-3}$ =ظا١٣٥

∴ – س + ٣ =ص ⇐ (٢) بحل المعادلتين ∴ س=٢ ، ص=١

∴ العدد المركب ع = ٢ + ت

[٨] اذا كانت معاملات الحدود الرابع والخامس والسادس على الترتيب فى مفكوك (٢س + ص)^{ن} تكون متتابعة حسابية أوجد قيمة ن



∵ معاملات الحدود الرابع والخامس والسادس

∴ ضعف معامل الحد الخامس = مجموع معاملى الحد الرابع والسادس

$$\therefore 2\text{ح}_5 = \text{ح}_4 + \text{ح}_6 \div \text{ح}_5 \quad \therefore 2 = \frac{\text{ح}_4}{\text{ح}_5} + \frac{\text{ح}_6}{\text{ح}_5}$$

$$\therefore 2 = \frac{4}{\text{ن}-4+1} \times \frac{2}{1} + \frac{\text{ن}-5+1}{5} \times \frac{1}{2} \quad \therefore 2 = \frac{8}{\text{ن}-3} + \frac{\text{ن}-4}{10} \quad \times 10(\text{ن}-3)$$

∴ ٢٠(ن-٣) = ٨٠ + (ن-٤)(ن-٣) ∴ ٢٠ن -٦٠ = ٨٠ + ن^2 -٧ن +١٢

∴ ن^2 -٢٧ ن +١٥٢=٠ ∴ ن = ١٩ أ، ٨

(بوكلت٢)

[٩] إذا كان $\text{ع}_1 = \frac{2\text{ت}}{1+\text{ت}}$ ، $\text{ع}_2 = 4(\text{جتا}\,15^\circ + \text{ت جا}\,15^\circ)$ أوجد $\frac{\text{ع}_2}{(\text{ع}_1)^2}$ على الصورة الاسية



$$\text{ع}_1 = \frac{2\text{ت}}{(1+\text{ت})} \times \frac{(1-\text{ت})}{(1-\text{ت})} = \frac{2\text{ت}+2}{2} = 1 + \text{ت} = \sqrt{2}\,\text{هـ}^{\frac{\pi}{4}\text{ت}}$$

$$\text{، ع}_2 = 4(\text{جتا}\frac{5\pi}{6} + \text{ت جا}\frac{5\pi}{6}) = 4\text{هـ}^{\frac{5\pi}{6}\text{ت}} \quad \therefore \frac{\text{ع}_2}{(\text{ع}_1)^2} = \frac{4\text{هـ}^{\frac{5\pi}{6}\text{ت}}}{2\text{هـ}^{\frac{\pi}{2}\text{ت}}} = 2\,\text{هـ}^{\frac{\pi}{3}\text{ت}}$$

[١٠] أوجد معامل أكبر حد فى مفكوك $(\text{س} + \frac{1}{\text{س}^2})^6$ ثم أثبت أن الحد الخالى من س هو الحد الاوسط

الربيع فايد معلم خبير الرياضيات

لايجاد اكبر معامل نحل المتباينة : معامل $\frac{ع_{ر+1}}{ع_{ر}} \ge ١$ ∴ $\frac{٦-ر+١}{ر} \times \frac{١}{٢} \ge ١$ ∴ $٧ - ر \ge ٢ر$

$٧ \ge ٣ر$ ∴ $\frac{٧}{٣} \ge ر$ ، ∴ ر =٢

∵ عدد حدود المفكوك = ٧ عدد فردى ∴ يوجد حد واحد له أكبر معامل هو $ع_{٣}$

∵ $ع_{ر+١} = {}^{٦}ق_{ر}\ س^{٦-ر} \left(\frac{١}{٢س}\right)^{ر} = {}^{٦}ق_{ر} \left(\frac{١}{٢}\right)^{ر} س^{٦-٢ر}$ بوضع ٦ -٢ر= ٠ ∴ ر=٣

∴ الحد الخالى من س هو $ع_{٤}$ هو الحد الاوسط

[١١] أوجد معادلة الكرة التى $\overline{أ ب}$ قطر فيها حيث أ(-١ ، ٤ ، ٢) ، ب(٣ ، -٢ ، ٦) ثم أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم $\overleftrightarrow{أ ب}$



مركز الكرة =(١ ، ١ ، ٤) ، نق = $\frac{١}{٢}\sqrt{٤^{٢}+٦^{٢}+٤^{٢}} = \sqrt{١٧}$

∴ معادلة الكرة $(س-١)^{٢} + (ص-١)^{٢} + (ع-٤)^{٢} = ١٧$

متجه اتجاه $\overleftrightarrow{أ ب}$ = (٤ ، -٦ ، ٤)   ∴ **الصور المختلفة لمعادلة المستقيم** $\overleftrightarrow{أ ب}$:

الصورة المتجه : $\overrightarrow{ر}$ =(-١ ، ٤ ، ٢) + ك (٤ ، -٦ ، ٤)

المعادلات البارامترية : س = -١ +٤ك ، ص = ٤ -٦ك ، ع = ٢ + ٤ك

المعادلة الاحداثية : $\frac{س+١}{٤} = \frac{ص-٤}{-٦} = \frac{ع-٢}{٤}$

[١٢] أثبت أن المستويين ٢س + ص + ٢ع =٨ ، ٤س + ٢ص + ٤ع = ١٠ متوازيان

و أوجد البعد بينهما



∵ $\overrightarrow{ن_{١}}$ =(٢ ، ١ ، ٢) ، $\overrightarrow{ن_{٢}}$ =(٤ ، ٢ ، ٤) ∴ $\frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢} = \frac{٢}{٤}$ ∴ **المستويان متوازيان**

ولايجاد البعد بينهما : **هو طول العمود الساقط من نقطة على احداهما على الآخر**

بفرض س=٠ ، ص=٠ والتعويض فى معادلة المستوى الاول ∴ ع =٤

∴ النقطة (٠ ، ٠ ، ٤) تقع على المستوى الاول

∴ **البعد بينهما** = $\frac{|٤\times٠+٢\times٠+٤\times٤-١٠|}{\sqrt{١٦+٤+١٦}} = \frac{٥}{٣}$ وحدة طول

[١٣] إذا كان مجموع معاملى $ع_٣$ ، $ع_٤$ فى مفكوك $(١+س)^{ن}$ يساوى $ن^٢ + ٦ن + ٥$

أوجد قيمة ن



$ق^{ن}_{٢} + ق^{ن}_{٣} = ن^٢ + ٦ن + ٥$ ∴ $ق^{ن+١}_{٣} = ن^٢ + ٦ن + ٥$

∴ $\frac{(ن+١)ن(ن-١)}{\lfloor٣} = ن^٢ + ٦ن + ٥$ ×٦ ∴ ن(ن-١)(ن+١) = $٦ن^٢ + ٣٦ن + ٣٠$

∴ $ن^٣ - ن = ٦ن^٢ + ٣٦ن + ٣٠$ ∴ $ن^٣ - ٦ن^٢ - ٣٧ن - ٣٠ = ٠$

بالحاسبة   ∴ ن = ١٠

[١٤] بدون فك المحدد أثبت أن $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١+س & ١ & ١ \\ ١ & ١+س & ١ \end{vmatrix} = س^٢$



باجراء $ص_٢-ص_١$ ، $ص_٣-ص_١$ ∴ $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ س & ٠ & ٠ \\ ٠ & س & ٠ \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٠ & س & ٠ \\ س & ٠ & ٠ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٠ & س & ٠ \\ ٠ & ٠ & س \end{vmatrix} = س^٢$

[١٥] أوجد الصورة المثلثية لقيم المقدار $(\sqrt{٣}+ت)^{\frac{٢}{٣}}$



بفرض ع = $\sqrt{٣}$ + ت ∴ |ع| = ٢ ، ظا θ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ فى الربع الاول ∴ θ = ٣٠° = $\frac{\pi}{٦}$

∴ ع = ٢ (جتا $\frac{\pi}{٦}$ + ت جا $\frac{\pi}{٦}$)

∴ $ع^{\frac{٢}{٣}} = ٢^{\frac{٢}{٣}}(جتا\frac{\pi}{٣} + ت جا\frac{\pi}{٣}) = ٢^{\frac{٢}{٣}}(جتا\frac{\frac{\pi}{٣}+٢ر\pi}{٣} + ت جا\frac{\frac{\pi}{٣}+٢ر\pi}{٣})$ حيث ر ∈ {٠ ، ١ ، ٢}

$ع_١ = (\text{جتا}\frac{\pi}{٩} + \text{ت جا}\frac{\pi}{٩})$ ، $ع_٢ = (\text{جتا}\frac{٧\pi}{٩} + \text{ت جا}\frac{٧\pi}{٩})$ ، $ع_٣ = (\text{جتا}\frac{١٣\pi}{٩} + \text{ت جا}\frac{١٣\pi}{٩})$

[١٦] أوجد رتبة المصفوفة $\begin{pmatrix} ٢ & -١ & -٣ \\ ١ & ٢ & ١ \\ ٣ & -٥ & ٢ \end{pmatrix}$ **ومن ثم أثبت أن المعادلات ٢س – ص -٣ع =٢ ، س + ٢ص + ع =١ ، ٣س -٥ص + ٢ع = ١٣ لها حل وحيد وأوجد ذلك الحل باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة**



∵ $\begin{vmatrix} ٢ & -١ & -٣ \\ ١ & ٢ & ١ \\ ٣ & -٥ & ٢ \end{vmatrix}$ **= ٢(٤+٥) +(٢-٣) -٣(-٥-٦) = ٥٠ ≠ ٠**

∴ ر(م)=ر(م*) =٣ =عدد المجاهيل ∴ للمعادلات حل وحيد

$م^{مل} = \begin{pmatrix} ٩ & ١ & -١١ \\ ١٧ & ١٣ & ٧ \\ ٥ & -٥ & ٥ \end{pmatrix}^{مد} = \begin{pmatrix} ٩ & ١٧ & ٥ \\ ١ & ١٣ & -٥ \\ -١١ & ٧ & ٥ \end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \frac{١}{٥٠} \begin{pmatrix} ٩ & ١٧ & ٥ \\ ١ & ١٣ & -٥ \\ -١١ & ٧ & ٥ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ \\ ١ \\ ١٣ \end{pmatrix} = \frac{١}{٥٠} \begin{pmatrix} ١٠٠ \\ -٥٠ \\ ٥٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \\ -١ \\ ١ \end{pmatrix}$

∴ م.ح { (٢ ، -١ ، ١) }

(بوكلت٣)

[١٧] أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة الاصل ويقطع المستقيم $\overleftarrow{ر}$ =(٣ ، ١ ، ٤) + ك(٢ ، ١ ، ٣) على التعامد



نقطة التقاطع تحقق معادلة المستقيم المعطى وهى (س ، ص ، ع) =(٣+٢ك ، ١ + ك ، ٤ + ٣ك)

∴ متجه اتجاه المستقيم العمودى عليه من نقطة الاصل هو (٣+٢ك ، ١ + ك ، ٤ + ٣ك)

ومن شرط التعامد ∴ (٣+٢ك ، ١ + ك ، ٤ + ٣ك)•(٢ ، ١ ، ٣) =٠

أ/ربيع فايد معلم خبير الرياضيات

∴ ٦+٤ك +١+ ك + ١٢ +٩ك=٠ ∴ ك =- $\frac{١٩}{١٤}$

∴ متجه اتجاه المطلوب (($\frac{٢}{٧}$ ، $-\frac{٥}{١٤}$ ، $\frac{-١}{١٤}$)) =(٤ ، -٥ ، -١)

∴ معادلة المستقيم $\overleftarrow{ر}$ = ك (٤ ، -٥ ، -١)

[١٨] اذا كان ع = هـ $^{\theta ت}$ فأوجد المقياس والسعة للعدد $\frac{١+ع}{١-ع}$



ع=جتاθ + ت جاθ وبفرض أن ٢ى =θ ∴ ع = جتا٢ى + ت جا٢ى

∴ $\frac{١+ع}{١-ع}=\frac{١+جتا٢ي+ت جا٢ي}{١-جتا٢ي+ت جا٢ي}=\frac{١+(٢جتا^٢ي-١)+٢ت جاي جتاي}{١-(١-٢جا^٢ي)+٢ت جاي جتاي}$

= $\frac{٢جتا^٢ي+٢ت جاي جتاي}{٢جا^٢ي+٢ت جاي جتاي}=\frac{٢جتاي(جتاي+ت جاي)}{٢جاي(جاي+ت جتاي)}$

=ظتاي × $\frac{(جتاي+ت جاي)}{(جتا(\frac{\pi}{٢}-ي)+ت جا(\frac{\pi}{٢}-ي))}$ =ظتاى×(جتا(٢ى - $\frac{\pi}{٢}$) + ت جا(٢ى - $\frac{\pi}{٢}$))

∴ مقياس العدد ظتا $\frac{\theta}{٢}$ ، سعته الاساسية = θ - $\frac{\pi}{٢}$

[١٩] ابحث امكانية حل المعادلات الآتية وأوجد الحل إن وجد $\begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٢ & ٣ & ٢ \\ ١ & -١ & ٠ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ١ \\ ٠ \\ ٣ \end{pmatrix}$



∵ $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٢ & ٣ & ٢ \\ ١ & -١ & ٠ \end{vmatrix}$ = (٠+٢) –(٠-٢) +(-٢-٣) = -١ ≠ ٠ ∴ يمكن حل انظمة المعادلات لان ر(م)=٣

$$\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٢ & ٣ & ٢ \\ ٠ & -١ & ١ \end{pmatrix}^{-١} \begin{pmatrix} ١ \\ ٠ \\ ٣ \end{pmatrix}$$

نوجد المعكوس الضربى للمصفوفة $\text{م} = \begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٢ & ٣ & ٢ \\ ٠ & -١ & ١ \end{pmatrix}$

$$\text{م}^{\text{مل}} = \begin{pmatrix} -٥ & ٢ & ٢ \\ ٢ & -١ & -١ \\ ١ & ٠ & -١ \end{pmatrix}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} -١ & -١ & ٢ \\ ٠ & -١ & ٢ \\ ١ & ٢ & -٥ \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \frac{١}{-١} \begin{pmatrix} -١ & -١ & ٢ \\ ٠ & -١ & ٢ \\ ١ & ٢ & -٥ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ \\ ٠ \\ ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ -٢ \\ ٢ \end{pmatrix}$$

$\therefore$ م.ح { (١ ، -٢ ، ٢) }

يمكن التحقق بالحاسبة mode+eqn+٢

[٢٠] بدون فك المحدد أثبت أن:

$$\begin{vmatrix} \text{ج} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{أ+ب+ج} & \text{أ+ب} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{أ} & \text{ب} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٠ & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{ب} & \text{أ+ب} & \text{ب} \\ \text{أ+ب} & \text{أ+ب+ج} & \text{ج} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$



بتدوير المحدد الاول والجمع مع الثانى

$$\begin{vmatrix} \text{ب} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{أ} & \text{أ+ب} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{أ+ب+ج} & \text{ج} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٠ & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{ب} & \text{أ+ب} & \text{ب} \\ \text{أ+ب} & \text{أ+ب+ج} & \text{ج} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{أ+ب} & \text{أ+ب} & \text{ب} \\ \text{أ+ب+ج} & \text{أ+ب+ج} & \text{ج} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

لأن $\text{ع}_١ = \text{ع}_٣$

[٢١] فى مفكوك $\left(\text{س} + \frac{١}{\text{س}^٢}\right)^٩$ ❶ أوجد رتبة وقيمة الحد الخالى من س

❷ أوجد قيمة س التى تجعل مجموع الحدين الاوسطين فى المفكوك يساوى صفر



أ/ربيع فايد معلم خبير الرياضيات

١ $ع_{ر+1} = {}^{9}ق_{ر} (س)^{9-ر} \left(\frac{1}{س^2}\right)^{ر}$ ∴ بوضع ٩ – ر - ٢ر=٠ ∴ ر=٣ ∴ $ع_4$ هو الحد الخالى

∴ $ع_4 = {}^{9}ق_{3} = 84$

٢ عدد الحدود = ١٠ ∴ يوجد حدان اوسطان هما $ع_5$ ، $ع_6$ ∴ $ع_5 + ع_6 = 0$ ÷ $ع_5$

∴ $1 + \frac{ع_6}{ع_5} = 0$ ∴ $1 + \frac{9-5+1}{5} \times \frac{1}{س^3} = 0$ ∴ $س^3 = -1$ ∴ س = -١

[٢٢] اذا تقاطع المستويان ٣س – ٦ص + ٦ع – ٥ = ٠ ، س + ع – ٣=٠



❶ أوجد معادلة خط تقاطع المستويين ❷ أوجد قياس الزاوية بين المستويين

١ بوضع ص = ك ∴ ٣س + ٦ع = ٦ك + ٥ ⇐ (١) ، س + ع = ٣ ⇐ (٢) × -٣ والجمع

∴ ٣ع = ٦ك - ٤ ∴ ع = $\frac{6ك-4}{3}$ بالتعويض فى (٢) ∴ س=٣- $\frac{6ك-4}{3}$ ⇐ ٣س = ٩ - ٦ك + ٤

∴ $\frac{3س-13}{-6} = ك = \frac{3ع+4}{6}$ ∴ معادلة خط تقاطع هى $\frac{3س-13}{-6} = ص = \frac{3ع+4}{6}$

٢ $ه_1 = (3 ، -6 ، 6)$ ، $ه_2 = (1 ، 0 ، 1)$

∴ $جتا\,\theta = \frac{|(3 ، -6 ، 6) \bullet (1 ، 0 ، 1)|}{\sqrt{9+36+36}\,\sqrt{1+0+1}}$ ∴ $جتا\,\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ∴ $\theta = 45°$

[٢٣] إذا قطع مستوى محاور الاحداثيات فى النقط ا ، ب ، جـ وكانت النقطة

(م ، ن ، و) هى نقطة تقاطع متوسطات المثلث ا ب جـ أثبت أن معادلة المستوى هى:

$$\frac{س}{م} + \frac{ص}{ن} + \frac{ع}{و} = 3$$



بفرض نقاط التقاطع هى ا(ا ، ٠ ، ٠) ، ب(٠ ، ب ، ٠) ، جـ (٠ ، ٠ ، جـ)

∵ (م ، ن ، و) = $\left(\frac{ا+0+0}{3} ، \frac{0+ب+0}{3} ، \frac{0+0+جـ}{3}\right)$

∴ ا = ٣م ، ب=٣ن ، جـ = ٣و ⇐ (١)

∵ معادلة المستوى الذى يقطع من محاور الاحداثيات ا ، ب ، جـ

الربيع فايد معلم خبير الرياضيات

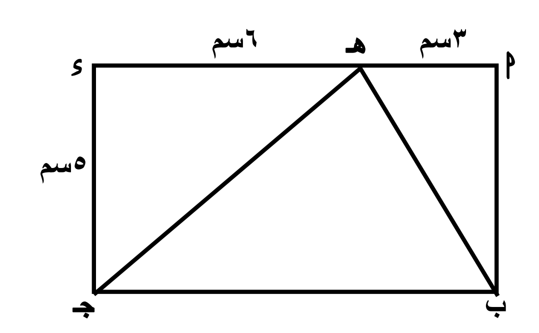
هى $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} + \frac{ع}{جـ} = ١$ ⇐ (٢) من (١) بالتعويض فى (٢)

∴ $\frac{س}{٣م} + \frac{ص}{٣ن} + \frac{ع}{٣و} = ١$ × ٣   ∴ $\frac{س}{م} + \frac{ص}{ن} + \frac{ع}{و} = ٣$

[٢٤] فى الشكل المقابل: أ ب جـ ء مستطيل ،

هـ ∈ $\overline{أ ء}$ فإن $\overleftarrow{هـ ب}$ • $\overleftarrow{هـ جـ}$ = ...

(٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠)





بفرض نظام احداثى مركزه جـ ∴ جـ(٠ ، ٠) ، هـ (٦ ، ٥) ، ب(٩ ، ٠)

∴ $\overleftarrow{هـ ب}$ • $\overleftarrow{هـ جـ}$ =(٣ ، -٥) • (-٦ ، -٥) = -١٨+٢٥ =٧

حل آخر

بهـ =$\sqrt{٣٤}$ ، هـ جـ =$\sqrt{٦١}$

فى Δ ب هـ جـ من قاعدة جيب التمام ∴ جتا(∠ب هـ جـ) = $\frac{٣٤+٦١-٩^٢}{٢\sqrt{٣٤}\sqrt{٦١}} = \frac{٧}{\sqrt{٣٤}\sqrt{٦١}}$

∴ $\overleftarrow{هـ ب}$ • $\overleftarrow{هـ جـ}$ = $\sqrt{٣٤}\sqrt{٦١} \times \frac{٧}{\sqrt{٣٤}\sqrt{٦١}}$ =٧

(بوكلت ٤)

[٢٥] اثبت بدون فك المحدد أن $\begin{vmatrix} ٠ & ل-م & ل-ن \\ م-ل & ٠ & م-ن \\ ن-ل & ن-م & ٠ \end{vmatrix} = ٠$



بفرض Δ = $\begin{vmatrix} ٠ & ل-م & ل-ن \\ م-ل & ٠ & م-ن \\ ن-ل & ن-م & ٠ \end{vmatrix}$ = -١×-١×-١ $\begin{vmatrix} ٠ & م-ل & ن-ل \\ ل-م & ٠ & ن-م \\ ل-ن & م-ن & ٠ \end{vmatrix}$

بتدوير المحدد ∴ Δ = - $\begin{vmatrix} 0 & ل - م & ل - ن \\ م - ل & 0 & م - ن \\ ن - ل & ن - م & 0 \end{vmatrix}$ ∴ Δ = - Δ ∴ ٢Δ = ٠ ∴ Δ = ٠ #

[٢٦] أوجد (ان امكن) حل النظام الاتى باستخدام طريقة المعكوس الضربى للمصفوفة

س + ٣ص + ٢ ع=٠ ، س + ع =-١ ، س + ٢ص = ٣



| أ | = $\begin{vmatrix} ١ & ٣ & ٢ \\ ١ & ٠ & ١ \\ ١ & ٢ & ٠ \end{vmatrix}$ =٥ ، ∴ ر(أ) = ر(أ*) = ٣ ∴ للنظام حل وحيد

أ^مل = $\begin{pmatrix} -٢ & ٤ & ٣ \\ ١ & -٢ & ١ \\ ٢ & ١ & -٣ \end{pmatrix}$ ∴ أ^-١ = $\frac{١}{٥}$ $\begin{pmatrix} -٢ & ٤ & ٣ \\ ١ & -٢ & ١ \\ ٢ & ١ & -٣ \end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix}$ = $\frac{١}{٥}$ $\begin{pmatrix} -٢ & ٤ & ٣ \\ ١ & -٢ & ١ \\ ٢ & ١ & -٣ \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} ٠ \\ -١ \\ ٣ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ١ \\ ١ \\ -٢ \end{pmatrix}$ ∴ م.ح { (١ ، ١ ، -٢) }

[٢٧] أوجد مسقط النقطة (١ ، ٢ ، ٣) على المستوى س + ٢ص + ٤ ع = ٥٩



نوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة المعطاة عمودياً على المستوى فيكون متجه اتجاه هو العمودى على المستوى و هى $\overleftarrow{ر}$ = (١ ، ٢ ، ٣) + ك (١ ، ٢ ، ٤) ∴ نقطة التقاطع تحقق المعادلة

∴ $\overleftarrow{ر}$ =(١+ ك ، ٢+ ٢ك ، ٣ + ٤ك) بالتعويض فى معادلة المستوى

∴ (١+ك) + ٢(٢+٢ك) + ٤(٣+٤ك) =٥٩ ∴ ك =٢ ∴ المسقط =(٣ ، ٦ ، ١١)

[٢٨] بكم طريقة يمكن وضع ٨ كرات متطابقة فى ٣ صناديق مختلفة بحيث لايوجد صندوق فارغ



وضع ١ ، ١ ، ٦ ومع التبديل عدد الطرق =٣

وضع ١ ، ٢ ، ٥ ومع التبديل عدد الطرق = ٦

أ/ربيع فايد معلم خبير الرياضيات

وضع ٢ ، ٢ ، ٤ ومع التبديل عدد الطرق = ٣

وضع ٣ ، ١ ، ٤ ومع التبديل عدد الطرق = ٦

وضع ٣ ، ٢ ، ٣ ومع التبديل عدد الطرق =٣

∴ اجمالى عدد الطرق = ٣ + ٦ + ٣ +٦ +٣ =٢١

حل آخر:

نضع فى كل صندوق كرة لكى يتحقق شرط عدم وجود صندوق فارغ

∴ يتبقى ٥ كرات توزع على الثلاث صناديق ∴ **نختار من الصناديق الثلاثة بعضها او كلها**

∴ احلال وبدون ترتيب ∴ ر=٥ ، ن =٣ ∴ عدد الطرق = $^{ن+ر-١}ق_{ر}$ = $^{٧}ق_{٥}$ =٢١

[٢٩] أوجد معادلة المستوى المار بالنقطتين (١ ، -١ ، ١) ، (-١ ، ١ ، ١) وعمودياً على المستوى س + ٢ص + ٢ع = ٥



بفرض $\overleftarrow{هـ}$ متجه اتجاه للمستقيم المار بالنقطتين ∴ $\overleftarrow{هـ}$ =(٢ ، -٢ ، ٠)

، $\overleftarrow{ن}$ متجه اتجاه العمودى على المستوى المعطى ∴ $\overleftarrow{ن}$ =(١ ، ٢ ، ٢)

نلاحظ أن $\overleftarrow{هـ}$ ، $\overleftarrow{ن}$ غير متوازيان ∴ هما متقاطعان أو متخالفان

∴ متجه اتجاه العمودى على المستوى المطلوب = $\overleftarrow{هـ} \times \overleftarrow{ن}$ = $\begin{vmatrix} \overleftarrow{س} & \overleftarrow{ص} & \overleftarrow{ع} \\ ٢ & -٢ & ٠ \\ ١ & ٢ & ٢ \end{vmatrix}$

= ٦ $\overleftarrow{س}$ -٤$\overleftarrow{ص}$ + ٦ $\overleftarrow{ع}$

∴ معادلة المستوى المطلوب ٦س -٤ص +٦ع =(٦ ، -٤ ، ٦)•(١ ، -١ ، ١)

٦س -٤ص +٦ع =١٦

[٣٠] باعتبار المستويين س + ٢ص – ٢ع = ١ ، ٢س + ص -٣ع =٥

❶ أوجد معادلة خط تقاطع المستويين   ❷ أوجد قياس الزاوية بين المستويين

حاول بنفسك تم حل مثال سابق [خط التقاطع $\frac{٣ص - ٩}{٤} = ٣ص + ٣ = ع$ ، θ = ١ً ٢٧ °]

[٢٩] اذا كان ع عدد مركب ❶ |ع| = ع + ٣ - ٢ت فأوجد ع ❷ |ع-٢| = ع +٣ت فأوجد ع

أ/ربيع فايد معلم خبير الرياضيات

① بفرض ع = س + ص ت ∴ | ع | = $\sqrt{س^{2} + ص^{2}}$ ∴ $\sqrt{س^{2} + ص^{2}}$ = س +ص ت +٣-٢ت

∴ $\sqrt{س^{2} + ص^{2}}$ = (س +٣) + (ص -٢) ت ∴ ص -٢=٠ ∴ ص=٢ ،

∴ $\sqrt{س^{2} + ص^{2}}$ = س +٣ بتربيع الطرفين والتعويض عن ص ∴ س = - $\frac{٥}{٦}$ ∴ ع = - $\frac{٥}{٦}$ +٢ت

② بفرض ع = س +ص ت ∴ |ع -٢| = $\sqrt{(س - ٢)^{2} + ص^{2}}$ = س + (ص+٣) ت

∴ ص=-٣ ، $\sqrt{(س - ٢)^{2} + ص^{2}}$ = س بالتربيع ∴ س = $\frac{١٣}{٤}$ ∴ ع = $\frac{١٣}{٤}$ -٣ت

أ/ ربيع فايد معلم خبير الرياضيات

دليل التقويم

[١] إذا كان $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ متجهين وحدة قياس الزاوية بينهما θ فإن $\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب}$ يكون متجه وحدة إذا كان θ = ... ($\frac{\pi}{3}$ ، $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{2}{3}\pi$ ، π)



∵ $\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب}$ متجه وحده ∴ $\| \overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب} \| = 1$ و بتربيع الطرفين ∴ $(\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب}) \bullet (\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب}) = 1$

∴ $\| \overleftarrow{أ} \|^2 + \| \overleftarrow{ب} \|^2 + 2 \overleftarrow{أ} \bullet \overleftarrow{ب} = 1$ ∴ ١ + ١ +٢×١×١× جتا θ =١

∴ جتا θ = $-\frac{1}{2}$ ∴ θ = $\frac{2}{3}\pi$

[٢] إذا كان $\overleftarrow{أ} \perp \overleftarrow{ب}$ ، $\overleftarrow{أ} \perp \overleftarrow{جـ}$ وكان $\overleftarrow{ب}$ =(٢ ، ٣ ، ٢) ، $\overleftarrow{جـ}$ =(١ ، ٢ ، ١)

وكان معيار $\| \overleftarrow{أ} \| = 4\sqrt{2}$ أوجد $\overleftarrow{أ}$



∵ $\overleftarrow{ب}$ لا يوازى $\overleftarrow{جـ}$ لان $\frac{2}{1} \neq \frac{3}{2}$ ، ∵ $\overleftarrow{أ} \perp \overleftarrow{ب}$ ، $\overleftarrow{أ} \perp \overleftarrow{جـ}$ ∴ $\overleftarrow{أ}$ عمودى على مستويهما

[٣] إذا كان $ع_1$ = ٢(جتا٧٥ + ت جا٧٥) ، $ع_2$ =٢(جتا١٥ + ت جا١٥)

باستخدام شكل ارجاند أوجد $ع_1 + ع_2$ على الصورة المثلثية ، $ع_1 - ع_2$ على الصورة الاسية



أولا: $ع_1 + ع_2$

نستخدم قاعدة المثلث لجمع وطرح المتجهات

$ل_1 = ل_2 = 2$ ∴ Δ أ ب و متساوى الساقين

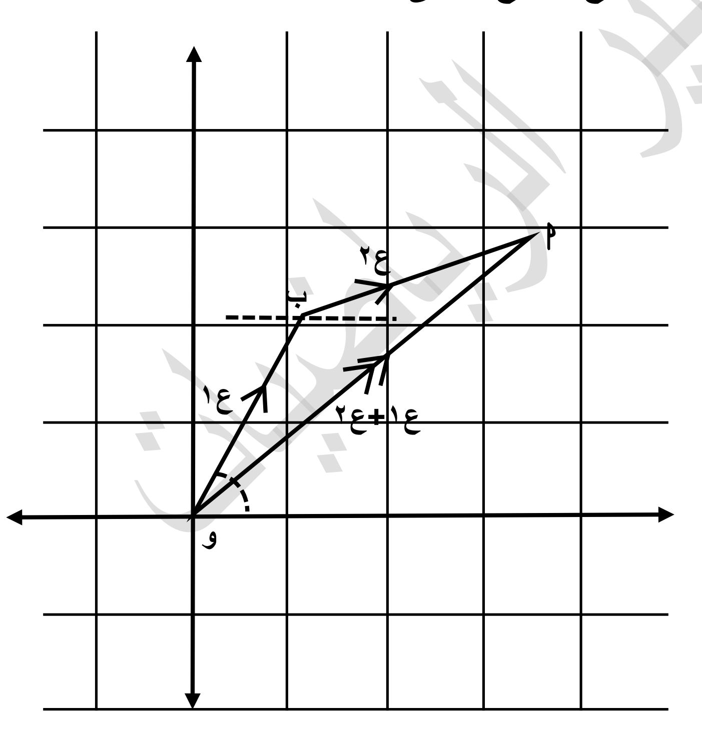
، ق(∠أ ب و) =١٥ + ١٠٥ =١٢٠ °

∴ ق(∠أ و ب) =٣٠ ° ومن قاعدة جيب التمام

∴ أ و = $2\sqrt{3}$ = مقياس $ع_1 + ع_2$

، زاوية $ع_1 + ع_2$ = ٧٥ - ٣٠ =٤٥

∴ $ع_1 + ع_2 = 2\sqrt{3}$ (جتا٤٥ + ت جا٤٥)



ثانيا: ع١ - ع٢

-ع٢ = ٢(جتا(-١٥) + ت جا(-١٥))

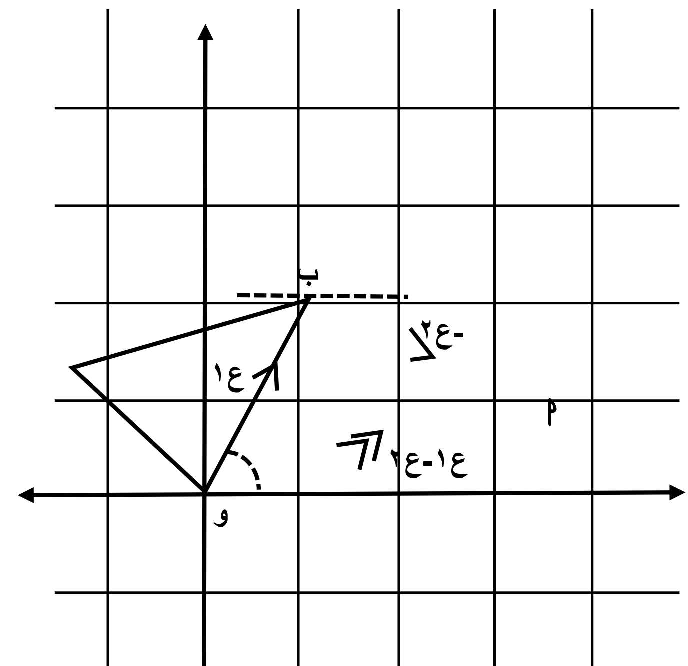
، ق(∠م ب و) = ١٠٥ - ١٥ = ٩٠°

ل١ = ل٢ = ٢ ∴ Δ م ب و متساوى الساقين

، زاوية ع١ - ع٢ = ٧٥ - ٤٥ = ٣٠

∴ م و = $٢\sqrt{٢}$ = مقياس ع١ - ع٢

∴ ع١-ع٢ = $٢\sqrt{٢}$ (جتا٣٠ + ت جا ٣٠)



[٤] أثبت أن إحدى قيم المقدار $\sqrt{\text{ت}} - \sqrt{\text{-ت}} = \sqrt{٢}$



بفرض الايمن = ص= $\sqrt{\text{ت}} - \sqrt{-١}\sqrt{\text{ت}} = \sqrt{\text{ت}} - \text{ت}\sqrt{\text{ت}} = \sqrt{\text{ت}}(١-\text{ت})$ بتربيع الطرفين

∴ ص² = ت(١-٢ت + ت²) ∴ ص² = - ٢ت² = ٢ ∴ ص = ± $\sqrt{٢}$

حل آخر:

الايمن = $\sqrt{\text{ت}} - \text{ت}\sqrt{\text{ت}} = \sqrt{\text{ت}}(١-\text{ت}) = \sqrt{\frac{١}{٢}\times ٢\text{ت}}\,(١-\text{ت}) = (١-\text{ت})\sqrt{\frac{١}{٢}\times(١+\text{ت})^{٢}}$

$= \pm(١-\text{ت})(١+\text{ت})\sqrt{\frac{١}{٢}} = \pm\sqrt{\frac{١}{٢}}\,(١-\text{ت}^{٢}) = \pm\sqrt{\frac{١}{٢}}\,(٢) = \pm\sqrt{٢}$

[٥] إذا كان ع١ = جتا٧٥ + ت جا٧٥ ، ع٢ = جتا١٥ + ت جا ١٥

أوجد بالصورة المثلثية العدد ع١+ ع٢



[٥] إذا كان ع١ = جتا٧٥ + ت جا٧٥ ، ع٢ = جتا١٥ + ت جا ١٥

أوجد بالصورة المثلثية العدد ع١+ ع٢



ع١+ع٢=(جتا٧٥ + جتا١٥) + ت(جا٧٥ + جا١٥)

أ/ربيع فايد معلم خبير الرياضيات

أ/ ربيع فايد معلم خبير الرياضيات

∵ جتاس + جتاص = ٢ جتا $\frac{\text{س} + \text{ص}}{٢}$ جتا $\frac{\text{س} - \text{ص}}{٢}$ ،

جاس + جاص = ٢جا $\frac{\text{س} + \text{ص}}{٢}$ جتا $\frac{\text{س} - \text{ص}}{٢}$

جتا٧٥ + جتا ١٥ = ٢جتا٤٥ جتا٣٠ = $\frac{\sqrt{٦}}{٢}$ ، جا٧٥ + جا ١٥ = ٢جا٤٥ جتا٣٠ = $\frac{\sqrt{٦}}{٢}$

∴ ع١+ع٢ = $\frac{\sqrt{٦}}{٢}$ + $\frac{\sqrt{٦}}{٢}$ت ∴ |ع١+ع٢| = $\sqrt{٣}$ ، θ = $\frac{\pi}{٤}$

∴ ع١+ع٢ = $\sqrt{٣}$(جتا$\frac{\pi}{٤}$ + ت جا$\frac{\pi}{٤}$)

حل آخر:

ع١+ع٢ = (جتا٧٥ + جتا١٥) + ت(جا٧٥ + جا١٥)

∴ السعة الاساسية ظاθ = $\frac{\text{جا٧٥} + \text{جا١٥}}{\text{جتا٧٥} + \text{جتا١٥}}$ = $\frac{\text{جتا١٥} + \text{جتا٧٥}}{\text{جتا٧٥} + \text{جتا١٥}}$ = ١ ∴ θ = $\frac{\pi}{٤}$

، |ع١+ع٢| = $\sqrt{(\text{جتا٧٥} + \text{جتا١٥})^٢ + (\text{جا٧٥} + \text{جا١٥})^٢}$

= $\sqrt{(\text{جتا}^٢\text{٧٥} + \text{٢جتا٧٥جتا١٥} + \text{جتا}^٢\text{١٥}) + (\text{جا}^٢\text{٧٥} + \text{٢جا٧٥جا١٥} + \text{جا}^٢\text{١٥})}$

= $\sqrt{٢ + \text{٢جتا٧٥جتا١٥} + \text{٢جا٧٥جا١٥}}$ = $\sqrt{٢ + \text{٢جتا٧٥جا٧٥} + \text{٢جا٧٥جتا٧٥}}$

= $\sqrt{٢ + \text{٤جتا٧٥جا٧٥}}$ = $\sqrt{٢ + \text{٢جا١٥٠}}$ = $\sqrt{٣}$ ∴ ع١+ع٢ = $\sqrt{٣}$(جتا$\frac{\pi}{٤}$ + ت جا$\frac{\pi}{٤}$)

[٦] إذا كان س + ص ت = $\frac{\text{أ} + \text{ب ت}}{\text{أ} - \text{ب ت}}$ فإن س² + ص² = ...



باخذ المقياس للطرفين ∴ |س + ص ت| = $\left|\frac{\text{أ} + \text{ب ت}}{\text{أ} - \text{ب ت}}\right| = \frac{|\text{أ} + \text{ب ت}|}{|\text{أ} - \text{ب ت}|}$

∴ $\sqrt{\text{س}^٢ + \text{ص}^٢} = \frac{\sqrt{\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢}}{\sqrt{\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢}}$ ∴ $\sqrt{\text{س}^٢ + \text{ص}^٢}$ = ١ ∴ س² + ص² = ١

حل آخر:

∵ س + ص ت = $\frac{أ + ب ت}{أ - ب ت}$ ⇐ (١) باخذ المرافق للطرفين ∴ س - ص ت = $\frac{أ - ب ت}{أ + ب ت}$ ⇐ (٢)

بضرب طرفى المعادلتين ∴ $س^{٢}$ + $ص^{٢}$ = $\frac{أ^{٢} + ب^{٢}}{أ^{٢} + ب^{٢}}$ = ١

[٧] إذا كان أ ، ب ، جـ ∈ ح ، أ + ب + جـ = ٨ ، أ ب + ب جـ + أ جـ = ١٢

باستخدام خواص المحددات أوجد قيمة المحدد
$$\begin{vmatrix} أ & ب & جـ \\ أ - ب & ب - جـ & جـ - أ \\ ٢ & ٢ & ٢ \end{vmatrix}$$

= $\begin{vmatrix} أ & ب & جـ \\ أ & ب & جـ \\ ٢ & ٢ & ٢ \end{vmatrix}$ - $\begin{vmatrix} أ & ب & جـ \\ ب & جـ & أ \\ ٢ & ٢ & ٢ \end{vmatrix}$ = صفر - $\begin{vmatrix} أ & ب & جـ \\ ب & جـ & أ \\ ٢ & ٢ & ٢ \end{vmatrix}$ باجراء ع١-ع٣ ، ع٢-ع٣

= -٢ $\begin{vmatrix} أ - جـ & ب - جـ & جـ \\ ب - أ & جـ - أ & أ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{vmatrix}$ = -٢ [(أ − جـ)(جـ - أ) −(ب − أ)(ب − جـ)]

= ٢ ($أ^{٢}$ + $جـ^{٢}$ - ٢ أ جـ + $ب^{٢}$ - أ ب − ب جـ + أ جـ)

= ٢($أ^{٢}$ + $جـ^{٢}$ + $ب^{٢}$ - أ جـ - أ ب − ب جـ) = ٢[$أ^{٢}$ + $جـ^{٢}$ + $ب^{٢}$ −(أ جـ + أ ب + ب جـ)]

= ٢[$أ^{٢}$ + $جـ^{٢}$ + $ب^{٢}$ −١٢] ⇐ (١)

∴ أ + ب + جـ = ٨ بتربيع الطرفين ∴ $أ^{٢}$ + $جـ^{٢}$ + $ب^{٢}$ + ٢ أ ب + ٢ أ جـ + ٢ ب جـ = ٦٤

∴ $أ^{٢}$ + $جـ^{٢}$ + $ب^{٢}$ + ٢ × ١٢ = ٦٤ ∴ $أ^{٢}$ + $جـ^{٢}$ + $ب^{٢}$ = ٤٠ ⇐ (٢) بالتعويض فى (١)

= ٢(٤٠ - ١٢) = ٥٦

[٨] مرافق العدد المركب (ت+ω) هو العدد المركب (-ت+ω ، -ت+$\omega^{٢}$ ، -ت-ω ، -ت-$\omega^{٢}$)

مرافق مجموع عددين يساوى مجموع مرافقيهما ∴ $\overline{ت + \omega} = \overline{ت} + \overline{\omega}$ = -ت+$\omega^{٢}$

أ/ربيع فايد معلم خبير الرياضيات

[٩] إذا كان ت ^{١٢} = $\omega^{١٢}$ فإن

(أ) ت = ω   **(ب) ت = $\pm\omega$**

(جـ) ت ، ω كلاهما أحد جذور المعادلة ع^{١٢} = ١   **(د) ت، ω لا علاقة بينهما**

∵ ت^{١٢} = ١ ، $\omega^{١٢}$ = ١ ∴ كلاهما أحد جذور المعادلة ع^{١٢} = ١

[١٠] إذا كان ك = (٢س+ت)^{١٥} - ١٥(ت-٢ص)(٢س+ت)^{١٤} +

$\frac{١٥\times١٤}{٢!}$ (ت - ٢ص)^{٢}(٢س + ت)^{١٣} - .... - (ت-٢ص)^{١٥} أوجدقيمة ك عندما

س = ت$\omega^{٢}$ ، ص = تω ثم أوجد معامل س^{٩}ص^{٦} فى مفكوك ك.



الطرف الايسر عبارة عن مفكوك ذات الحدين

∴ ك = $[(٢س+ت) - (ت - ٢ص)]^{١٥}$ = $(٢س + ٢ص)^{١٥}$

= $(٢ت\omega^{٢} + ٢ت\omega)^{١٥} = (٢ت)^{١٥}(\omega^{٢}+\omega)^{١٥}$ = $-٢^{١٥}ت^{١٥}(-١)^{١٥}$ = $٢^{١٥}ت^{١٥}$

[١١]

أ/ربيع فايد معلم خبير الرياضيات

كتاب المدرسة و مصادر اخرى

[١] أثبت أن المستقيم $\frac{س-١}{٢} = \frac{ص+٣}{-١} = \frac{ع}{٣}$ يقطع المستوى ٣س + ٢ص + ع -٨=٠ فى نقطة (أوجدها) ثم أوجد قياس زاوية ميل المستقيم على المستوى

المعادلة البارمترية للمستقيم هى س = ١ +٢ ك ، ص = -٣ – ك ، ع = ٣ك ⇐ (١)

∴ $\overleftarrow{هـ}$ = (٢ ، -١ ، ٣) ، للمستوى $\overleftarrow{ن}$ = (٣ ، ٢ ، ١)

∴ $\overleftarrow{هـ}$ • $\overleftarrow{ن}$ = ٦ -٢ +٣ = ٧ ≠ ٠ المستقيم لايوازى المستوى لانه لو كان عمودى على المتجه العودى على المستوى فيكون موازيا للمستوى

∴ المستقيم يقطع المستوى فى نقطة من (١) بالتعويض فى معادلة المستوى

∴ ٣(١+٢ك) + ٢(-٣ – ك) + (٣ك) – ٨ =٠ ∴ -١١ +٧ك=٠ ∴ ك = $\frac{١١}{٧}$

∴ نقطة التقاطع هى ($\frac{٢٩}{٧}$ ، $\frac{-٣٢}{٧}$ ، $\frac{٣٣}{٧}$)

قياس الزاوية بين المستقيم والعمودى على المستوى جتا θ = $\frac{|(٢ ، -١ ، ٣)•(٣ ، ٢ ، ١)|}{\sqrt{٤+١+٩}\sqrt{٩+٤+١}}$

∴ جتا θ = $\frac{١}{٢}$ ∴ θ = ٦٠°

∴ قياس الزاوية بين المستقيم والمستوى = ٩٠ – ٦٠ = ٣٠°

[٢] إذا كان ع= س + ص ت عدد مركب وكان $\left|\frac{ع-٣ت}{ع+٣ت}\right| = ١$ فإن ع فى مستوى أرجاند

يقع .... (على محور السينات ، على محور الصادات ، فى الربع الأول ، فى الربع الثالث)

∵ $\left|\frac{ع_١}{ع_٢}\right| = \frac{|ع_١|}{|ع_٢|}$ ، ∵ $\left|\frac{ع-٣ت}{ع+٣ت}\right| = ١$ ∴ $\left|\frac{س+(ص-٣)ت}{س+(ص+٣)ت}\right| = \frac{\sqrt{س^٢+(ص-٣)^٢}}{\sqrt{س^٢+(ص+٣)^٢}} = ١$

∴ $\sqrt{س^٢+(ص-٣)^٢}$ = $\sqrt{س^٢+(ص+٣)^٢}$ ∴ ص=٠ ∴ على محور السينات

[٣] (الاختبار ٦) إذا كان $\overleftarrow{أ}$ =(٢ ، ١ ، -٢) ، $\overleftarrow{أ}$ + $\overleftarrow{ب}$ = $\overleftarrow{أ}$ × $\overleftarrow{ب}$ فاوجد $\overleftarrow{ب}$

نفرض أن $\overrightarrow{ب}$ = (س ، ص ، ع) ∴ (س+٢ ، ص +١ ، ع - ٢) = $\begin{vmatrix} \overrightarrow{ع} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{س} \\ -٢ & ١ & ٢ \\ ع & ص & س \end{vmatrix}$

∴ (س+٢ ، ص +١ ، ع - ٢) = (ع+٢ص ، -٢س - ٢ع ، ٢ص -س)

∴ س +٢ = ع + ٢ص ∴ س – ٢ص – ع = -٢ ⇐ (١)

، ص +١ = -٢س -٢ع ∴ ٢س + ص +٢ع = -١ ⇐ (٢)

، ع – ٢ = ٢ص – س ∴ س - ٢ص + ع = ٢ ⇐ (٣) وبالحاسبة made+eqn+٢

∴ س = -٢ ، ص =-١ ، ع =٢ ∴ $\overrightarrow{ب}$ = (-٢ ، -١ ، ٢)

[٤] رصد مدير شركة ثلاث جوائز متماثلة يتنافس عليها عشرة موظفين بحيث يمكن لكل موظف الحصول على جائزة أو اكثر بكم طريقة يمكن توزيع هذه الجوائز ؟



اختيار (١) من (١٠) لاستلام الثلاث جوائز

أو اختيار (١) من (١٠) لاستلام جائزتين و (١) من (٩) لاستلام جائزة

أو اختيار (٣) من (١٠) لاستلام الثلاث جوائز

∴ عدد الطرق = ${}^{١٠}ق_{١} + {}^{١٠}ق_{١} \times {}^{٩}ق_{١} + {}^{١٠}ق_{٣}$ = ١٠ + ٩٠ +١٢٠ = ٢٢٠ طريقة

[٥] أوجد معادلة المستوى الذى يحتوى المستقيم ل١: $\overrightarrow{ر}$ =(٠ ، ٣ ، -٥) + ك١(٦ ، -٢ ، -١)

ويوازى المستقيم ل٢: $\overrightarrow{ر}$ =(١ ، ٧ ، -٤) + ك٢(١ ، -٣ ، ٣)



نلاحظ أن المستقيمين غير متوازيين و غير متقاطعين ∴ متخالفان ∴ المتجه العمودى عليهما هو المتجه العمودى على المستوى المطلوب معادلته (المستقيم الموازى للمستوى يوازى أكثر من مستقيم فيه)

$\overrightarrow{ن}$ = هـ١×هـ٢ = $\begin{vmatrix} \overrightarrow{ع} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{س} \\ -١ & -٢ & ٦ \\ ٣ & -٣ & ١ \end{vmatrix}$ =-٣ $\overrightarrow{س}$ -١٩ $\overrightarrow{ص}$ -١٦ $\overrightarrow{ع}$

∴ المستوى يمر بالمستقيم الاول ∴ النقطة (٠ ، ٣ ، -٥) تقع فى المستوى

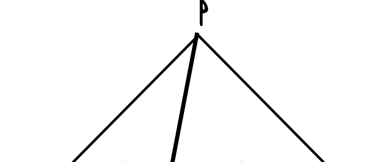
الربيع فايد معلم خبير الرياضيات

∴ معادلة المستوى هى -٣س -١٩ص -١٦ع = (-٣ ، -١٩ ، -١٦) ● (٠ ، ٣ ، -٥)=٢٣

∴ المعادلة هى ٣س + ١٩ص + ١٦ع + ٢٣ =٠

[٦] إذا كان المتجهان $\overrightarrow{\text{م ب}}$ =٣ $\overrightarrow{\text{س}}$ -٣ $\overrightarrow{\text{ع}}$ ، $\overrightarrow{\text{م جـ}}$ = $\overrightarrow{\text{س}}$ -٢ $\overrightarrow{\text{ص}}$ + $\overrightarrow{\text{ع}}$ هما ضلعان فى Δمبجـ

فإن طول المتوسط المرسوم من الرأس م = ... وحدة طول ($\sqrt{3}$ ، $\sqrt{6}$ ، ٢$\sqrt{3}$ ، ٣$\sqrt{2}$)



من قاعدة المتوسط ∴ $\overrightarrow{\text{م ب}}$ + $\overrightarrow{\text{م جـ}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{م ء}}$

∴ (٣ ، ٠ ، -٣) + (١ ، -٢ ، ١) = ٢ $\overrightarrow{\text{م ء}}$

∴ $\overrightarrow{\text{م ء}}$ = (٢ ، -١ ، -١) ∴ || $\overrightarrow{\text{م ء}}$ || = $\sqrt{6}$ وحدة طول

[٧] أثبت أن المستقيمين $\overrightarrow{ر_1}$ = (٣ ، -١ ، ٢) + ك١ (٤ ، ١ ، ٣) ،

$\overrightarrow{ر_2}$ =(٠ ، ٤ ، -١) +ك٢(١ ، -١ ، ٢) متخالفان



شرط التخالف هو عدم التقاطع وعدم التوازى ∵ $\frac{٤}{١} \neq \frac{١}{-١}$ ∴ المستقيمان غير متوازيان

نوجد نقط التقاطع بحل المعدلتين معاً

∴ (٣ ، -١ ، ٢) + ك١ (٤ ، ١ ، ٣)= (٠ ، ٤ ، -١) + ك٢(١ ، -١ ، ٢)

∴ ٣+٤ك١=ك٢ ⇐ (١) ، -١ + ك١ =٤-ك٢ ⇐ (٢) ، ٢+٣ك١ =-١+٢ك٢ ⇐ (٣)

بحل (١) ، (٢) ∴ ك١= $\frac{٢}{٥}$ ، ك٢ = $\frac{٢٣}{٥}$ بالتعويض فى (٣) الايمن= $\frac{١٦}{٥}$ ، الايسر= $\frac{٤١}{٥}$

لاتحقق المعادلة الثالثة ∴ المستقيمان غير متقاطعان

∴ المستقيمان غير متوازيين وغير متقاطعان ∴ فهما ممتخالفان

[٨] أوجد البعد العمودى من النقطة (٣ ، -١ ، ٧)

للمستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٢ ، -١) ، (٠ ، ٣ ، ٥)



$\overrightarrow{\text{هـ}}$ =(٢ ، -١ ، -٦) ∴ بفرض النقطة م(٣ ، -١ ، ٧) ، نقطة على المستقيم ب(٢ ، ٢ ، -١)

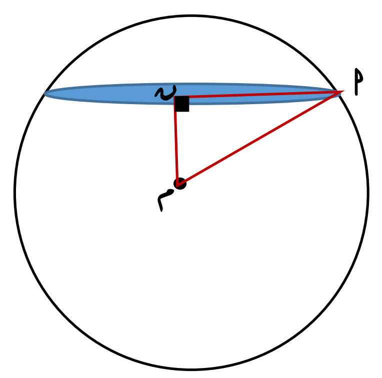
$\overrightarrow{\text{م ب}}$ = (-١ ، ٣ ، -٨) ∴ $\overrightarrow{\text{م ب}}$ × $\overrightarrow{\text{هـ}}$ = $\begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ -١ & ٣ & -٨ \\ ٢ & -١ & -٦ \end{vmatrix}$ = -٢٤ $\overrightarrow{\text{س}}$ -٢٢ $\overrightarrow{\text{ص}}$ -٥ $\overrightarrow{\text{ع}}$

طول العمود = $\frac{\|\overrightarrow{أب}\times\overrightarrow{هـ}\|}{\|\overrightarrow{هـ}\|}$ = $\frac{\sqrt{٥٧٦٤+٤٨٤+٢٥}}{\sqrt{٤+١+٣٦}}$ ≈ ٥,١ وحدة طول

[٩] إذا قطع المستوى ٢س – ص -٢ع +١٢ = ٠ الكرة (س+٣)^{٢} +(ص+٢)^{٢} +(ع-١)^{٢}=١٥

أوجد مساحة المقطع الناتج





مركز الكرة م(-٣ ، -٢ ، ١) وطول نصف قطرها م أ = $\sqrt{١٥}$

المقطع الناتج من قطع الكرة بمستو عبارة عن دائرة

نوجد بعد المركز عن المستوى = $\frac{|-٦+٢-٢\times١+١٢|}{\sqrt{٤+١+٤}}$ =٢

فى Δ أ م ن من فيثاغورث ∴ أ ن = $\sqrt{١١}$ = طول نصف قطر الدائرة الناتجة

∴ مساحتها = π نق^{٢} = ١١ π وحدة مربعة

[١٠] أثبت أن المستقيمان $\overleftarrow{ر_١}$ =(٣ ، ١ ، -١) + ك$_١$(١ ، ٢ ، ٣) ،

$\overleftarrow{ر_٢}$ =(٢ ، ٥ ، ٠) + ك$_٢$(١ ، -١ ، ١) متقاطعان

و أوجد نقطة تقاطعهما ثم أوجد معادلة المستوى الذى يحتويهما



هـ$_١$ = (١ ، ٢ ، ٣) ، هـ$_٢$=(١ ، -١ ، ١) ∴ $\frac{١}{١} \neq \frac{٢}{-١}$ ∴ غير متوازيين ∴ المستقيمان أما متقاطعين

أو متخالفين نوجد نقطة التقاطع بحل المعادلات

∴ (٣ ، ١ ، -١) + ك$_١$(١ ، ٢ ، ٣) = (٢ ، ٥ ، ٠) + ك$_٢$(١ ، -١ ، ١)

∴ ك$_١$ – ك$_٢$ = -١ ⇐(١) ، ٢ك$_١$ + ك$_٢$ = ٤ ⇐ (٢) ، ٣ك$_١$ – ك$_٢$ = ١ ⇐ (٣)

من (١) ، (٢) ك$_١$= ١ ، ك$_٢$ =٢ بالتعويض فى (٣) ∴ ٣×١ - ٢ =١ تحقق المعادلة

∴ المستقيمن متقاطعين ونقطة التقاطع بالتعويض فى معادلة المستقيم الاول

∴ $\overleftarrow{ر}$ = (٣ ، ١ ، -١) + (١ ، ٢ ، ٣) =(٤ ، ٣ ، ٢)

لايجاد معادلة المستوى الذى يحتويهما:

أ/ربيع فايد معلم خبير الرياضيات

$\overrightarrow{هـ_١} \times \overrightarrow{هـ_٢} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ١ & ٢ & ٣ \\ ١ & -١ & ١ \end{vmatrix} = ٥\overrightarrow{س} + ٢\overrightarrow{ص} - ٣\overrightarrow{ع}$

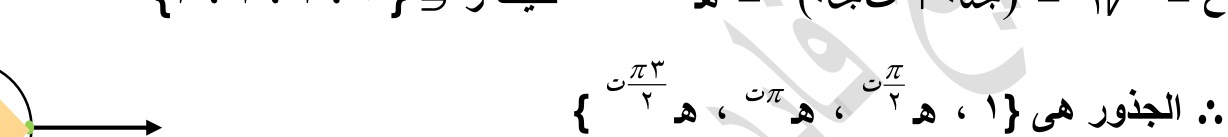
∴ معادلة المستوى ٥س + ٢ص - ٣ع =(٥ ، ٢ ، -٣) • (٤ ، ٣ ، ٢)

٥س + ٢ص - ٣ع = ٢٠ + ٦ - ٦   ∴ ٥س + ٢ص - ٣ع = ٢٠

[١١] أوجد فى $\overline{ك}$ مجموعة حل المعادلة $ع^٤ = ١$ ومثل الجذور على مستوى أرجاند



$ع = \sqrt[٤]{١} = (جتا٠ + ت جا٠)^{\frac{١}{٤}} = هـ^{\frac{٠+٢\pi ر}{٤}ت}$ حيث ر ∋ { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣}



∴ الجذور هى {١ ، $هـ^{\frac{\pi}{٢}ت}$ ، $هـ^{\pi ت}$ ، $هـ^{\frac{٣\pi}{٢}ت}$ }

وتمثل على دائرة مركزها نقطة الاصل

وطول نصف قطرها = ١ وتمر برؤوس مربع رؤوسه هى الجذور

[١٢] (اختبارات) إذا كان س عدد مركب فإن عدد حلول المعادلة $\begin{vmatrix} س^٣ + ١ & س - ١ \\ س + ١ & س^٣ - ١ \end{vmatrix} = ٠$

يساوى .... (٦ ، ٥ ، ٤ ، ٣)



$(س^٣ + ١)(س^٣ - ١) - (س+١)(س-١) = ٠$ من الدرجة السادسة ∴ عدد الحلول فى ك يساوى ٦

[١٣] أثبت أن $(\omega - ١)^{٣ن} = (١ - \omega^٢)^{٣ن}$



الايسر = $(١ + \omega)^{٣ن}(١ - \omega)^{٣ن} = (-\omega^٢)^{٣ن}(١ - \omega)^{٣ن}$

$= (-١)^{٣ن}(\omega)^{٣ن}(١ - \omega)^{٣ن} = (\omega - ١)^{٣ن}$

[١٤] إذا كان $\begin{vmatrix} \text{لو}_{٢}\,٣ & ٣ & ٩ \\ ٠ & \text{لو}_{٣}\,٥ & ٧ \\ ٠ & ٠ & \text{لو}_{٥}\,\text{س} \end{vmatrix} = ٤$ فإن س = ... **[١٦ أ، ٣٢ أ، ٦٤ أ، ١٢٨]**

$\text{لو}_{٢}\,٣ \times \text{لو}_{٣}\,٥ \times \text{لو}_{٥}\,\text{س} = ٤$

$\therefore \text{لو}_{٥}\,\text{س} = \dfrac{٤}{\text{لو}_{٢}\,٣ \times \text{لو}_{٣}\,٥} = \dfrac{٤\,\text{لو}_{٣}\,٢}{\text{لو}_{٣}\,٥} = \dfrac{\text{لو}_{٣}\,١٦}{\text{لو}_{٣}\,٥} = \dfrac{\text{لو}\,١٦}{\text{لو}\,٣} \times \dfrac{\text{لو}\,٣}{\text{لو}\,٥} = \dfrac{\text{لو}\,١٦}{\text{لو}\,٥} = \text{لو}_{٥}\,١٦$

$\therefore$ س = ١٦

[١٥] بدون فك المحدد أثبت أن $\begin{vmatrix} \text{أ}^{٢}+١ & \text{أب} & \text{أجـ} \\ \text{أب} & \text{ب}^{٢}+١ & \text{جـب} \\ \text{أجـ} & \text{جـب} & \text{جـ}^{٢}+١ \end{vmatrix} = \text{أ}^{٢}+\text{ب}^{٢}+\text{جـ}^{٢}+١$

$\begin{vmatrix} \text{أ}^{٢} & \text{أب} & \text{أجـ} \\ \text{أب} & \text{ب}^{٢}+١ & \text{جـب} \\ \text{أجـ} & \text{جـب} & \text{جـ}^{٢}+١ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ١ & \text{أب} & \text{أجـ} \\ ٠ & \text{ب}^{٢}+١ & \text{جـب} \\ ٠ & \text{جـب} & \text{جـ}^{٢}+١ \end{vmatrix} =$

$\text{أ}^{٢}\begin{vmatrix} ١ & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{ب} & \text{ب}^{٢}+١ & \text{جـب} \\ \text{جـ} & \text{جـب} & \text{جـ}^{٢}+١ \end{vmatrix} + (\text{ب}^{٢}+١)(\text{جـ}^{٢}+١) - \text{جـب}\times\text{جـب}$

$= \text{أ}^{٢}\begin{vmatrix} ١ & \text{ب} & \text{جـ} \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{vmatrix} + (\text{ب}^{٢}\text{جـ}^{٢}+\text{ب}^{٢}+\text{جـ}^{٢}+١) - \text{ب}^{٢}\text{جـ}^{٢} = \text{أ}^{٢}+\text{ب}^{٢}+\text{جـ}^{٢}+١$

الربيع فايد معلم خبير الرياضيات

[١٦] بدون فك المحدد أثبت أن $\begin{vmatrix} أ & ب & جـ \\ أ^2 & ب^2 & جـ^2 \\ ب جـ & جـ أ & أ ب \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} أ^2 & ب^2 & جـ^2 \\ أ^3 & ب^3 & جـ^3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$



الايمن $= \frac{1}{أ ب جـ} \begin{vmatrix} أ^2 & ب^2 & جـ^2 \\ أ^3 & ب^3 & جـ^3 \\ أ ب جـ & أ ب جـ & أ ب جـ \end{vmatrix} = \frac{أ ب جـ}{أ ب جـ} \begin{vmatrix} أ^2 & ب^2 & جـ^2 \\ أ^3 & ب^3 & جـ^3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} أ^2 & ب^2 & جـ^2 \\ أ^3 & ب^3 & جـ^3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ #

[١٧] اوجد معامل $س^5$ فى مفكوك $(1 - س + س^2)(1 + س)^{11}$



باستخدام خاصية التوزيع

$(1 - س + س^2)(1 + س)^{11} = (1 + س)^{11} - س(1 + س)^{11} + س^2(1 + س)^{11}$

$= {}^{11}ق_5 - {}^{11}ق_4 + {}^{11}ق_3 = 297$

[١٨] اوجد الحد الخالى من س فى مفكوك $(1 - \frac{1}{س} + س)^5$



الحد الخالى = ١+ الحد الخالى فى مفكوك $(س - \frac{1}{س})^5$ إن وجد

الحد العام فى مفكوك $(س - \frac{1}{س})^5$ $ح_{ر+1} = {}^5ق_ر \, س^{5-ر} (\frac{-1}{س})^ر = {}^5ق_ر (-1)^ر س^{5-2ر}$

بوضع $5 - 2ر = 0$ ∴ $ر = \frac{5}{2}$ ∴ لا يوجد حد خال فى مفكوك $(س - \frac{1}{س})^5$

∴ الحد الخالى من س فى مفكوك $(1 - \frac{1}{س} + س)^5$ هو ١

[١٩] $\sqrt{5 + 12ت}$ = ... ($\pm(2+3ت)$ ، $\pm(3+2ت)$ ، $\pm(2-3ت)$ ، $\pm(3-2ت)$)



الربيع فايد معلم خبير الرياضيات

بفرض ع = ٥ +١٢ت ∴ ل =١٣ ، س = ٥ ∴ الجذرين هما $\pm\left[\sqrt{\frac{١٣+٥}{٢}}+ت\sqrt{\frac{١٣-٥}{٢}}\right]$

=±(٢+٣ت)

أ/ربيع فايد معلم خبير الرياضيات